1

Cognome:...**Nome:**...
Matricola:..
Data orale:...☐ 7-6-2018 .☐ 5-7-2018

PROBABILITA' E LABORATORIO
Prof. L. Beghin

5-6-2018

Esercizio n.1 15

Devo andare all'aereoporto e ho 30 minuti prima che il check in del mio volo chiuda. Posso scegliere tra due possibili alternative: posso prendere la metropolitana che passa sotto casa e che impiega 20 minuti o recarmi a piedi, con un cammino di 5 minuti, ad una fermata dell'autobus dove passano due linee diverse che portano entrambe alla stazione in 18 minuti. Sia la metropolitana che i due autobus passano ogni 15 minuti, ma non ne conosco l'orario di arrivo.

i) Calcolare la probabilità che riesca a prendere l'aereo nei due casi (prendendo la metropolitana o l'autobus) 9

ii) Suppongo ora di scegliere lanciando un dado e andare con la metropolitana se esce 1 o 2 e con gli autobus negli altri casi. Sapendo che sono riuscita a prendere l'aereo, calcolare la probabilità che abbia usato la metropolitana. 6

Esercizio n.2 15

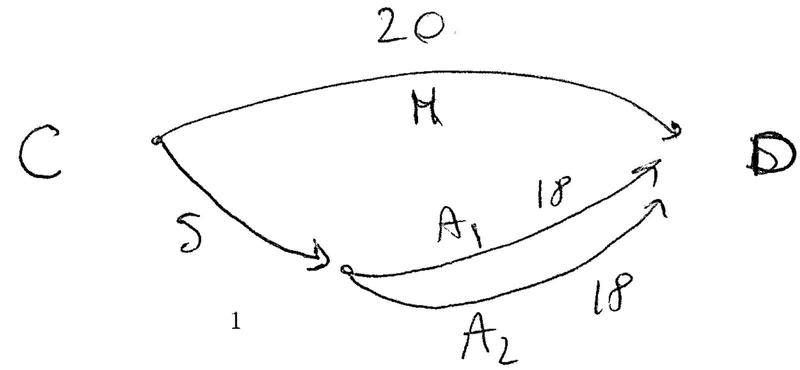
Date due v.a. X e Y indipendenti e identicamente distribuite, entrambe esponenziali di parametro $\lambda = 1$, studiare la convergenza della successione:

$$U_n = \frac{X^{1/n}}{X^{1/n} + Y^{1/n}}$$

i) in distribuzione 10
ii) quasi certa 5
per $n \to +\infty$.

Soluzioni

Es. 1



D = "arrivo a destinazione (in tempo)"

X = "tempo di attesa"

M = "uso la metropolitana"

A_i = "uso l'autobus i-esimo" $i = 1, 2$

i) $P(D|M) = P(X<10) = \frac{10}{15} = \frac{2}{3}$

poiché $X \sim Unif(0,15)$

$P(D|A_1 \cup A_2) = P(\min(X_1, X_2) \leq 7)$

$= 1 - P(\min(X_1, X_2) > 7)$

$= 1 - P(X_1 > 7, X_2 > 7)$

per le indip. e identica distr.

$= 1 - (P(X>7))^2 = 1 - \frac{8^2}{15^2} = \frac{161}{225}$

ii) $$P(M|D) = \frac{P(D|M)P(M)}{P(D|M)P(M) + P(D|A_1 \cup A_2)P(A_1 \cup A_2)}$$

$$= \frac{\cancel{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{3}}{\cancel{\frac{2}{3}} \cdot \frac{1}{3} + \frac{161}{225} \cdot \cancel{\frac{2}{3}}} = \frac{75}{236}$$

<u>ES. 2</u>

$$U_n = \frac{X^{Y_n}}{X^{Y_n} + Y^{Y_n}} \in (0,1) \text{ q.c. } \forall n$$

$$F_{U_n}(u) = \begin{cases} 0 & u \leq 0 \\ ? & 0 < u \leq 1 \\ 1 & u > 1 \end{cases}$$

per $u \in (0,1)$

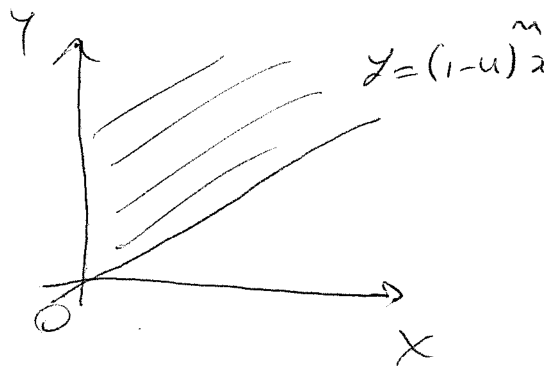
$$F_{U_n}(u) = P\left(\frac{X^{1/n}}{X^{1/n}+Y^{1/n}} < u\right) = P\left(X^{1/n} < uX^{1/n} + Yu^{1/n}\right)$$

3

$$= P\left(X^{1/n}(1-u) < Yu^{1/n}\right)$$

$$= P\left(Y > \left(\frac{1-u}{u}\right)^n X\right)$$

>0 poiché $u \in (0,1)$



$$= \int_0^{+\infty} dx \int_{\left(\frac{1-u}{u}\right)^n x}^{+\infty} e^{-x-y}\, dy$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-x}\left[-e^{-y}\right]_{\left(\frac{1-u}{u}\right)^n x}^{+\infty} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x-\left(\frac{1-u}{u}\right)^n x} dx$$

$$= \frac{1}{1+\left(\frac{1-u}{u}\right)^n}$$

$$F_{U_n}(u) = \begin{cases} 0 & u \le 0 \\ \dfrac{1}{1+\left(\frac{1-u}{u}\right)^n} & 0 < u \le 1 \\ 1 & u > 1 \end{cases}$$

per $\frac{1-u}{u} < 1 \Rightarrow 1-u < u \Rightarrow u > \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1-u}{u}\right)^n \to$

$\frac{1-u}{u} > 1 \Rightarrow 1-u > u \Rightarrow u < \frac{1}{2} \Rightarrow \left(\frac{1-u}{u}\right)^n \to \infty$

Quindi $\lim_{n\to+\infty} F_{U_n}(u) = \begin{cases} 0 & u \leq \frac{1}{2} \\ 1 & u > \frac{1}{2} \end{cases}$

$$\boxed{U_n \xrightarrow[P]{d} U \overset{\text{p.c.}}{=} \frac{1}{2}}$$

(c) $$\frac{X(\omega)^{Y_n}}{X(\omega)^{Y_n} + Y(\omega)^{Y_n}} \xrightarrow{n\to+\infty} \frac{X(\omega)^0}{X(\omega)^0 + Y(\omega)^0} = \frac{1}{2}$$

$\forall \omega$ a meno di un insieme di probabilità nulla

$$\Rightarrow \quad P\left(\lim_{n\to+\infty} \frac{X^{Y_n}}{X^{Y_n}+Y^{Y_n}} = \frac{1}{2}\right) = 1$$

$$\Rightarrow \quad \boxed{U_n \xrightarrow{\text{p.c.}} U = \frac{1}{2}}$$