Cognome:.............................. Nome:...............................

Probabilità
Prof. L.Beghin

4-6-2013

Esercizio 1

Una classe di liceo è composta da 16 alunni, tra maschi e femmine.

i) Si supponga di scegliere a caso due alunni, estraendoli senza ripetizione. Calcolare il numero di maschi della classe, se la probabilità che i due alunni scelti siano dello stesso sesso è uguale alla probabilità che siano un maschio e una femmina.

ii) come al punto i), tranne che le due estrazioni sono con ripetizione.

Esercizio 2

Sia X una variabile aleatoria con la seguente densità:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{k}{(\lambda+x)^{\alpha+1}}, & x > 0 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases},$$

per $\alpha, \lambda, k > 0$.

i) Trovare la costante k.

ii) Trovare il supporto della variabile

$$Y = \frac{1}{(\lambda + X)^{\alpha+1}}.$$

iii) Ricavare la distribuzione di Y.

iv) Studiare la convergenza della seguente successione, per $n \to \infty$,

$$Z_n = \frac{Y_1}{n} + \ldots + \frac{Y_n}{n}$$ dove Y_i sono i.i.d.

SOLUZIONI

Es. 1)

m = "n° maschi"

$16-m$ = "n° femmine"

i) $$P(\text{stesso sesso}) = \frac{m}{16} \cdot \frac{m-1}{15} + \frac{16-m}{16} \cdot \frac{16-m-1}{15}$$

$$= \frac{m(m-1) + (16-m)(15-m)}{16 \cdot 15}$$

$P(\text{sessi diversi}) = \frac{m}{16}\cdot\frac{(16-m)}{15}$

$$\Rightarrow \quad \frac{m^2 - m + 16\cdot 15 + m^2 - 31m}{\cancel{16\cdot 15}} = \frac{16m - m^2}{\cancel{16\cdot 15}}$$

$$\Rightarrow \quad m^2 - 16m + 80 = 0 \qquad m = \frac{16 \pm \sqrt{16^2 - 240}}{2} = \begin{cases} 6 \\ 10 \end{cases}$$

$m = 6$ oppure $m = 10$

ii) $P(\text{stesso sesso}) = \frac{m^2}{16^2} + \frac{(16-m)^2}{16^2}$

$P(\text{sessi diversi}) = \frac{2(16-m)m}{16^2}$

$$\Rightarrow \quad \frac{m^2 + 16^2 + m^2 - 32m}{16^2} = \frac{32m - 2m^2}{\cancel{16^2}}$$

$$\Rightarrow \quad 4m^2 - 64m + 16^2 = 0 \quad \Rightarrow \quad m = \frac{16 \pm \sqrt{\cancel{16^2 - 256}}}{2} = 8$$

$m = 8$

$\boxed{\text{Es. 2}}$

i) $$\int_0^{+\infty} \frac{k}{(d+x)^{\alpha+1}}\,dx = k\left[\frac{(d+x)^{-\alpha}}{-\alpha}\right]_0^{+\infty} = \frac{k}{\alpha}d^{-\alpha} = 1$$

$$\boxed{k = \alpha d^{\alpha}}$$

ii) $Y = \frac{1}{(d+X)^{\alpha+1}} \quad \Rightarrow \quad Y \in \left(0, d^{-(\alpha+1)}\right)$ q.c.

iii) $\boxed{f_Y(z)} = f_X(g^{-1}(z))\left|\frac{d}{dz}g^{-1}(z)\right|$ dove $Y = g(X) = (d+X)^{-\alpha-1}$, $g^{-1}(z) = y^{-\frac{1}{\alpha+1}} - d$

$$= \frac{\alpha \lambda^\alpha}{(\cancel{\lambda} + y^{-\frac{1}{\alpha+1}} - \cancel{\lambda})^{\alpha+1}} \cdot \frac{1}{\alpha+1} y^{-\frac{\alpha+2}{\alpha+1}} = \boxed{\frac{\alpha \lambda^\alpha}{\alpha+1} y^{-\frac{1}{\alpha+1}} \quad \text{per } 0<y<\lambda^{-(\alpha+1)}}$$

poiché $\frac{d}{dy} g^{-1}(y) = -\frac{1}{\alpha+1} y^{-\frac{1}{\alpha+1}-1} = -\frac{1}{\alpha+1} y^{-\frac{1+\alpha+1}{\alpha+1}}$

$$= -\frac{1}{\alpha+1} y^{-\frac{\alpha+2}{\alpha+1}}$$

oppure $F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ ? & 0 < y \le \lambda^{-(\alpha+1)} \\ 1 & \lambda^{-(\alpha+1)} < y \end{cases}$

$$F_Y(y) = P(Y < y) = P\left(\frac{1}{(\lambda+X)^{\alpha+1}} < y\right)$$

$$= P\left(\frac{1}{\lambda+X} < y^{\frac{1}{\alpha+1}}\right)$$

$$= P\left(X > y^{-\frac{1}{\alpha+1}} - \lambda\right)$$

$$= \alpha \lambda^\alpha \int_{y^{-\frac{1}{\alpha+1}}-\lambda}^{+\infty} (\lambda+x)^{-\alpha-1} dx = \cancel{\alpha} \lambda^\alpha \left. \frac{(\lambda+x)^{-\alpha}}{\cancel{-\alpha}} \right]_{y^{-\frac{1}{\alpha+1}}-\lambda}^{+\infty}$$

$$= \lambda^\alpha y^{\frac{\alpha}{\alpha+1}}$$

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ \lambda^\alpha y^{\frac{\alpha}{\alpha+1}} & 0 < y \le \lambda^{-(\alpha+1)} \\ 1 & y > \lambda^{-(\alpha+1)} \end{cases}$$

(v) $Z_n = \frac{\cancel{X}_1 + \dots + Y_n}{n}$.

$\boxed{Z_n \xrightarrow[\text{q.c.}]{P} EY}$ per la LFGN.

$$EY = \frac{\alpha}{\alpha+1} \lambda^\alpha \int_0^{\lambda^{-(\alpha+1)}} y^{1-\frac{1}{\alpha+1}} dy = \frac{\alpha}{2\alpha+1} \frac{1}{\lambda^{\alpha+1}}$$