Cognome:................................ Nome:....................................
Data orale: ☐ 14 febbraio ☐ 15 febbraio

Probabilità - Prof. L.Beghin

12 febbraio 2013

Esercizio 1

Un mazzo di carte è costituito dalle 13 carte di cuori. Si girano, una dopo l'altra, tutte le 13 carte. Calcolare la probabilità che:

(a) fra le prime n carte girate non ci sia nè l'asso nè il re (con $n \leq 11$);

(b) la seconda figura esca al decimo posto, sapendo che la prima figura esce all'ottavo posto.

Esercizio 2

Sia X una variabile aleatoria con la seguente densità:

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{k}{(1-x)^2} & 2 < x < 3 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

i) calcolare il valore di k;
ii) calcolare $\mathbb{E}(1-X)^3$;
iii) ricavare la funzione di ripartizione di X;
iv) ricavare la distribuzione di $Y = \sqrt{X}$.

Esercizio 3

Siano X_i, per $i = 1, 2, \ldots$ variabili aleatorie indipendenti e tutte esponenziali di parametro λ. Si studi la convergenza della seguente successione

$$Z_n = \exp\left\{\frac{\sqrt{X_1} + \ldots + \sqrt{X_n} - nc}{n}\right\},$$

dopo aver opportunamente determinato la costante c.

[Si ricorda che $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$]

SOLUZIONI

Es. 1 (a) $P(A) = \dfrac{\binom{11}{n}}{\binom{13}{n}} = \dfrac{C_{11,n}}{C_{13,n}}$

(b) B = "seconda fig. al X°"
C = "prima fig. all' VIII°"

$P(B|C) = \dfrac{P(B \cap C)}{P(C)} = \dfrac{P(\text{pr. fig. all' VIII} \cap \text{sec. fig. al X°})}{P(C)}$

$$P(B \cap C) = \frac{D_{10,8} \cdot D_{3,2}}{D_{13,10}} = \frac{10!}{2!} \cdot \frac{3!}{1!} \, \frac{3!}{13!}$$

$$P(C) = P(1° \text{ lr. all' VIII}) = \frac{3 \cdot D_{10,7}}{D_{13,8}} = \frac{3 \cdot \frac{10!}{3!}}{\frac{13!}{5!}} = 3 \cdot \frac{10!}{3!} \, \frac{5!}{13!}$$

$$P(B|C) = \frac{\cancel{10!}}{\cancel{2!}} \, \frac{3!\,3!}{\cancel{13!}} \, \frac{\cancel{3!} \cdot \cancel{13!}}{\cancel{3} \cdot \cancel{10!}\, 5!} = \frac{6}{5 \cdot 4} = \frac{3}{10}$$

ES. 2 (i)

$$k \int_2^3 \frac{1}{(1-x)^2} \, dx = k \left[(1-x)^{-1} \right]_2^3 = k \left[-\frac{1}{2} + 1 \right] = 1$$

$$k = 2$$

(ii)

$$E\left[(1-X)^3\right] = 2 \int_2^3 \frac{(1-x)^3}{(1-x)^2} \, dx = 2 \int_2^3 (1-x) \, dx$$

$$= 2 - \cancel{2} \frac{x^2}{\cancel{2}} \Big]_2^3 = 2 - 9 + 4 = -3$$

(iv) $Y = \sqrt{X}$ $\quad Y \in (\sqrt{2}, \sqrt{3})$ p.c.

Posso applicare il teorema perché in $(2,3)$ la funzione

$g(x) = \sqrt{x}$ è monotona

$X = Y^2 = h(Y)$ $\quad |h'(y)| = 2y$

$$f_Y(y) = f_X(y^2) \cdot 2y = \frac{4y}{(1-y^2)^2} \qquad \sqrt{2} < y < \sqrt{3}$$

(iii)

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \le 2 \\ ? & 2 < x \le 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases} = \begin{cases} 0 & x \le 2 \\ 2 \cdot \frac{x-2}{x-1} & 2 < x \le 3 \\ 1 & x > 3 \end{cases}$$

$$F_X(x) = P(X < x) = 2 \int_2^x \frac{1}{(1-t)^2} \, dt = 2 \left[+ (1-t)^{-1} \right]_2^x$$

$$= 2 \left[(1-x)^{-1} + 1 \right]$$

$$= 2\left[\frac{1}{1-x} + 1\right] = 2\,\frac{2-x}{1-x} = 2\,\frac{x-2}{x-1}$$

Es. 3

$$\sum_{i=1}^{n} \frac{\sqrt{X_i}}{n} \xrightarrow{P} \mathbb{E}(\sqrt{X_i}) \qquad \text{per la LDGN}$$

quindi

$$\mathbb{E}(\sqrt{X_i}) = \int_0^{+\infty} \lambda \sqrt{x}\, e^{-\lambda x}\, dx = \frac{\cancel{\lambda}}{\cancel{\lambda}} \int_0^{+\infty} \frac{\sqrt{z}}{\sqrt{\lambda}}\, e^{-z}\, dz$$

$\lambda x = z$

$x = \frac{z}{\lambda}$

$$= \frac{\Gamma\left(\frac{3}{2}\right)}{\sqrt{\lambda}} = \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda}} = C$$

$$\Rightarrow \quad \frac{\sqrt{X_1} + \dots + \sqrt{X_n}}{n} - \frac{\sqrt{\pi}}{2\sqrt{\lambda}} \xrightarrow{P} 0$$

$\Rightarrow$ poiché l'exp è una funzione continua

$$Z_n \xrightarrow{P} e^0 = 1$$