Cognome:.............................. Nome:..................................

PROBABILITA'

Prof. L.Beghin

11 gennaio 2013

Esercizio 1

In un gioco n giocatori $A_1, \dots, A_n$ lanciano a turno una moneta regolare (comincia A_1, poi A_2 e così via).

Il primo che ottiene testa vince; se invece tutti ottengono croce si ricomincia da capo nello stesso ordine.

i) Calcolare la probabilità di vittoria del giocatore A_k, per $k = 1, ..., n$.

ii) Verificare che la somma delle probabilità calcolate al punto i) è pari uno.

Esercizio 2

Sia X una variabile aleatoria uniforme in (0,1) e Y una variabile aleatoria, indipendente da X, distribuita come un'esponenziale di parametro 2.

i) Si ricavi la distribuzione della v.a. definita come

$$Z = \frac{e^Y}{X}.$$

ii) Si calcoli $\mathbb{E}Z$.

Esercizio 3

Siano $X_1, ...X_n$ v.a. indipendenti ed identicamente distribuite con distribuzione uniforme in $(0, 1)$. Studiare la convergenza in distribuzione della successione definita come

$$Y_n = \exp\left\{\frac{n}{\alpha}\left[\max(X_1, ...X_n) - 1\right]\right\}, \qquad 0 < \alpha \leq 1$$

i) per $\alpha \in (0, 1)$

ii) per $\alpha = 1$.

Soluzioni:

Es. 1 : i) $P(A_1 \text{ vince}) = P[(A_1 \text{ vince al I° turno}) \cup (A_1 \text{ vince al II° turno}) \cup \dots]$

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2^{2n}}\cdot\frac{1}{2} + \dots$$

$$= \frac{1}{2}\sum_{j=0}^{\infty}\left(\frac{1}{2^n}\right)^j = \frac{1}{2}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2^n}} = \frac{2^{n-1}}{2^n - 1}$$

$$P(A_2 \text{ vince}) = \frac{1}{2^2} + \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2^2} + \dots$$

$$= \frac{1}{2^n}\,\frac{1}{1-\frac{1}{2^n}} = \frac{2^{n-2}}{2^n-1}$$

$$\Rightarrow \boxed{P(A_k \text{ vince}) = \frac{2^{n-k}}{2^n-1}}$$

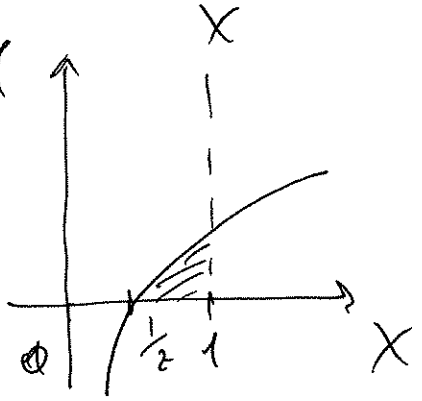
ii) $$\sum_{k=1}^{n} P(A_k \text{ vince}) = \sum_{k=1}^{n} \frac{2^{n-k}}{2^n-1} = \frac{2^n}{2^n-1}\sum_{k=1}^{n}\frac{1}{2^k}$$

$$= \frac{2^n}{2^n-1}\sum_{r=0}^{n-1}\frac{1}{2^{r+1}} = \frac{2^{\cancel{n-1}}}{\cancel{2^n-1}}\;\frac{1-\frac{1}{2^n}}{1-\frac{1}{2}} = 1$$

<u>Es.2</u> $X \sim Unif(0,1)$ $\quad Y \sim Exp(2)$ indip.

$$Z = \frac{e^Y}{X} \qquad Z \in (1,+\infty) \text{ q.c.}$$

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \le 1 \\ ? & z > 1 \end{cases}$$



$$F_Z(z) = P(Z < z)$$

$$= P(e^Y < zX)$$

$$= P(Y < \lg(zX))$$

$$= 2\int_{\frac{1}{z}}^{1} dx \int_0^{\lg(z\cdot x)} e^{-2y}\,dy$$

$$= \int_{1/z}^{1} \left[-e^{-2y}\right]_0^{\lg(zx)} dx$$

$$= \int_{1/z}^{1} dx - \int_{1/z}^{1} e^{-2g(zx)}\, dx$$

$$= 1 - \frac{1}{z} - \int_{1/z}^{1} z^{-2} x^{-2}\, dx$$

$$= 1 - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}\left[-x^{-1}\right]_{\frac{1}{z}}^{1} = 1 - \frac{1}{z} - \frac{1}{z^2}(z-1) = 1 - \frac{2}{z} + \frac{1}{z^2}$$

$$\Rightarrow \quad F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \le 1 \\ 1 - \frac{2}{z} + \frac{1}{z^2} & z > 1 \end{cases}$$

verifica: per $z = 1$ $F_Z(z^+) = 0$

per $z \to +\infty$ $F_Z(z) \to 1$

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = \left(\frac{2}{z^2} - \frac{2}{z^3}\right) \mathbb{1}_{z>1}$$

(ii) $\mathbb{E} Z = \int_{1}^{+\infty} z\left(\frac{2}{z^2} - \frac{2}{z^3}\right) dz = \int_1^{+\infty} \frac{2}{z}\, dz - \int_1^{+\infty} \frac{2}{z^2}\, dz$

$$= 2\left[\lg z\right]_1^{+\infty} + \frac{2}{3}\left(z^{-3}\right]_1^{+\infty} = \infty$$

<u>ES. 3</u>

$$Y_n = \exp\left\{\frac{n}{\alpha}\left[\underbrace{\max(X_1 \ldots X_n) - 1}_{\leq 0}\right]\right\}$$

$$Y_n \in \left(e^{-n/\alpha}, 1\right) \text{ q.c.}$$

$$F_{Y_n}(y) = P\left(\exp\left\{\frac{n}{\alpha}[\max(X_1 \ldots X_n) - 1]\right\} < y\right)$$

$$= P\left(\frac{n}{\alpha}[\max(X_1 \ldots X_n) - 1] < \lg(y)\right)$$

$$= P\left(\max(X_1 \ldots X_n) - 1 < \frac{\alpha \lg(y)}{n}\right)$$

$$= P\Big($$

$$= P\left(\max(X_1 \ldots X_n) < 1 + \frac{\alpha}{n} \lg y\right)$$

$$\overset{\text{per i.i.d.}}{=} \left[P\left(X < 1 + \frac{\alpha}{n} \lg y\right)\right]^n$$

$$= \left(1 + \frac{\alpha \lg y}{n}\right)^n$$

$$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & y \leq e^{-\frac{n}{\alpha}} \\ \left(1 + \frac{\alpha \lg y}{n}\right)^n & e^{-n/\alpha} < y \leq 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases}$$

$$\xrightarrow{n \to +\infty} F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ e^{\alpha \lg y} = y^\alpha & 0 < y < 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases}$$

i) $Y_n \xrightarrow{d} Y$ con f.r. $\nearrow$ per $\alpha > 0$

ii) $Y_n \xrightarrow{d} Y \sim$ ~~Exp~~ $\text{Unif}(0,1)$ per $\alpha = 1$