Cognome:.. Nome:..

Probabilità - II ESONERO
Prof. L.Beghin

8-1-2013

Esercizio n.1

Una certa facoltà ha n_1 studenti iscritti alla laurea triennale e n_2 alla specialistica. Il numero di studenti frequentanti della laurea specialistica è una v.a. X distribuita come una Binomiale di parametri n_1 e p. Analogamente, per la specialistica il numero di frequentanti è $Y \sim Bin(n_2, p)$, indipendente da X.

i) Ricavare la distribuzione del numero totale di studenti frequentanti: $X+Y$ (si consiglia l'uso della funzione generatrice delle probabilità o della formula di convoluzione).

ii) Ricavare la distribuzione del numero di frequentanti della triennale X condizionato sul totale dei frequantanti $X+Y$.

iii) Interpretare i risultati.

Esercizio n.2

Siano X_j, per $j = 1, 2, ...n$, delle variabili aleatorie indipendenti e tutte esponenziali di parametro $\lambda > 0$ e sia

$$Z_n = \frac{\left(X_1 + ... + X_n - \frac{n}{\lambda}\right)^2}{n}.$$

Studiare la convergenza della successione Z_n, ricavando esplicitamente la distribuzione della variabile limite.

SOLUZIONI

ES. 1 $\quad X \sim Bin(n_1, p) \qquad Y \sim Bin(n_2, p)$

i) $\boxed{X+Y \sim Bin(n_1+n_2, p)}$

Infatti $\quad G_X(u) = \mathbb{E}\, u^X = \sum_{j=0}^{n_1} u^j p^j q^{n_1-j} \binom{n_1}{j} = (q+up)^{n_1}$

$$G_Y(u) = (q+up)^{n_2}$$

$$G_{X+Y}(u) = G_X(u) \cdot G_Y(u) = (q+up)^{n_1+n_2}$$

ii) $P(X=r \mid X+Y=s) = ?$ per $r = 0, 1, \dots s$

$$\boxed{P(X=r \mid X+Y=s)} = \frac{P(X=r,\ X+Y=s)}{P(X+Y=s)}$$

$$= \frac{P(X=r,\ Y=s-r)}{P(X+Y=s)} = \frac{P(X=r)\,P(Y=s-r)}{P(X+Y=s)}$$

$$= \frac{\binom{n_1}{r} \cancel{p^r}\, \cancel{q^{n_1-r}} \binom{n_2}{s-r} \cancel{p^{s-r}}\, \cancel{q^{n_2-s+r}}}{\binom{n_1+n_2}{s} \cancel{p^s}\, \cancel{q^{n_1+n_2-s}}}$$

$$= \boxed{\frac{\binom{n_1}{r}\binom{n_2}{s-r}}{\binom{n_1+n_2}{s}} \qquad r = 0, \dots, n_1}$$

iii) La distribuzione ricavata al punto (ii) è un'ipergeometrica
Tale risultato si spiega considerando che se si
condiziona sul totale dei frequentanti viene meno
l'indipendenza tra prove successive.

Es. 2 $\quad X_i \sim Exp(\lambda)$ indip.

$$Z_n = \frac{\left(X_1 + \cdots + X_n - \frac{n}{\lambda}\right)^2}{n} = \left(\frac{X_1 + \cdots + X_n - \frac{n}{\lambda}}{\sqrt{n}}\right)^2$$

Studio la conv. di $\quad Y_n = \dfrac{X_1 + \cdots + X_n - \frac{n}{\lambda}}{\sqrt{n}}$

Per il TLC $\quad \dfrac{X_1 + \cdots + X_n - \quad E(X_i)}{\sqrt{n V(X_i)}} \xrightarrow{d} N(0,1)$

ma $E(X_i) = \frac{1}{\lambda}$

$$V(X_i) = \frac{2}{\lambda^2} - \frac{1}{\lambda^2} = \frac{1}{\lambda^2}$$

Quindi $\quad \dfrac{X_1 + \cdots + X_n - \frac{n}{\lambda}}{\sqrt{\frac{n}{\lambda^2}}} = \lambda Y_n \xrightarrow{d} N(0,1)$

$\Longrightarrow \quad Y_n \xrightarrow{d} Y \sim N(0, \frac{1}{\lambda^2})$

per il teorema sulla conv. di funzione continua di una succes.

$\Longrightarrow \quad \boxed{Z_n = Y_n^2 \xrightarrow{d} Z = Y^2}$

La distribuzione di $Z \in (0, +\infty)$, si ricava come segue

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ ? & z > 0 \end{cases}$$

$$F_Z(z) = P(Y^2 < z) = P(-\sqrt{z} < Y < \sqrt{z})$$

$$= \lambda \int_{-\sqrt{z}}^{\sqrt{z}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}\lambda^2}}{\sqrt{2\pi}} dx = 2\lambda \int_0^{\sqrt{z}} \frac{e^{-\frac{x^2}{2}\lambda^2}}{\sqrt{2\pi}} dx$$

$$f_Z(z) = \cancel{2}\lambda \frac{1}{\cancel{2}\sqrt{z}} \frac{e^{-\frac{z}{2}\lambda^2}}{\sqrt{2\pi}} = \left(\frac{\lambda^2}{2}\right)^{\frac{1}{2}} \frac{z^{-\frac{1}{2}}}{\Gamma\left(\frac{1}{2}\right)} e^{-\frac{\lambda^2}{2}z}$$

$$\boxed{Z \sim \text{Gamma}\left(\frac{\lambda^2}{2}, \frac{1}{2}\right)}$$