Cognome:............................... Nome:..................................
CFU n.:...

Probabilità

Prof. L.Beghin - G. Salinetti

18-9-2012

Esercizio 1

Sia data un'urna contentente 6 palline numerate da 1 a 6. Si estraggono senza ripetizione due palline dall'urna e se ne osserva il numero. Calcolare:

i) la probabilità che i due numeri estratti differiscano al più di 2.

ii) la probabilità che siano usciti 2 e 6 in questo ordine, sapendo che la differenza tra i due numeri estratti è maggiore di 2.

iii) il valore atteso della differenza tra i due numeri estratti.

Esercizio 2

Sia X una variabile aleatoria con la seguente densità:

$$f_X(x) = 2x, \qquad 0 < x < 1$$

e siano $X_1, ..., X_n$ delle v.a. indipendenti e tutte distribuite come X. Si studi la convergenza della successione

$$Y_n = (X_1 \cdot ... \cdot X_n)^{1/n}$$

e della successione dei momenti

$$\mathbb{E}Y_n.$$

SOLUZIONI

ESERCIZIO 1

Y_1 = "n° della I° pallina estratta"

Y_2 = "n° della II° pallina estratta"

i) $P(|Y_1 - Y_2| \le 2) = ?$

$P(|Y_1 - Y_2| = 1) = \frac{10}{30}$

$P(|Y_1 - Y_2| = 2) = \frac{8}{30}$

$P(|Y_1 - Y_2| = 3) = \frac{6}{30}$

$P(|Y_1 - Y_2| = 4) = \frac{4}{30}$

$P(|Y_1 - Y_2| = 5) = \frac{2}{30}$

$\Rightarrow P(|Y_1 - Y_2| \le 2) = \frac{18}{30}$

ii) $P\left((2,6) \mid |Y_1 - Y_2| > 2\right) = \dfrac{P\left((2,6) \cap |Y_1 - Y_2| > 2\right)}{P\left(|Y_1 - Y_2| > 2\right)}$ 2

$$= \frac{P(2,6)}{\frac{12}{30}} = \frac{\frac{1}{30}}{\frac{12}{30}} = \frac{1}{12}$$

iii) $\mathbb{E}(|Y_1 - Y_2|) = 1 \cdot \frac{10}{30} + 2 \cdot \frac{8}{30} + 3 \cdot \frac{6}{30} + 4 \cdot \frac{4}{30} + 5 \cdot \frac{2}{30}$

$$= \frac{70}{30} = \frac{7}{3}$$

ESERCIZIO 2

$X \qquad f(x) = 2x \qquad 0 < x < 1$

$X, X_1, .., X_n$ iid

$$Y_n = (X_1 \cdots X_n)^{\frac{1}{n}}$$

$$\Rightarrow \log Y_n = \frac{1}{n} \log (X_1 \cdots X_n)$$
$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\log X_i}_{\text{i.i.d}}$$

Se $W_i = \log X_i$, studio la convergenza di $\frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} W_i$

Per la LDGN $\quad \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} W_i \xrightarrow{P} EW_i$

se W_i hanno media e varianza finiti.

$X = e^{W}$

Applico la formula

$$f_W(w) = f_X(e^w) \frac{d}{dw} e^w$$

poiché $\log X$ è invertibile e derivabile. Inoltre (3)

$W \in (-\infty, 0)$ perché $X \in (0,1)$.

$\Rightarrow$ per $w \in (-\infty, 0)$ $f_W(w) = 2e^{2w} \cdot e^{w} = 2e^{2w}$

$$\Rightarrow \quad \mathbb{E}W = 2\int_{-\infty}^{0} e^{2w} w \, dw \qquad 2w = -x \quad w = -\frac{x}{2}$$

$$= -\int_0^{+\infty} e^{-x} (\cancel{-}x)(\cancel{-}\tfrac{1}{2})\, dx = -\frac{\overset{=1}{\Gamma(2)}}{2} = -\frac{1}{2} < \infty$$

$$\mathbb{E}W^2 = 2\int_{-\infty}^{0} e^{2w} w^2 \, dw$$

$$= 2\int_0^{+\infty} \frac{x^2}{2^2} e^{-x} \frac{1}{2}\, dx = \frac{\Gamma(3)}{4} = \frac{2}{4} = \frac{1}{2} < \infty$$

$$\mathrm{Var}\, W = +\frac{1}{2} - \frac{1}{4} = \frac{1}{4} < \infty$$

Quindi

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log X_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} W_i \xrightarrow{P} -\frac{1}{2}$$

Per il teorema della conv. i.p. per una funzione continua

$$\Rightarrow \quad \boxed{Y_n} = \exp\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} W_i\right\} \boxed{\xrightarrow{P} \exp\left\{-\frac{1}{2}\right\}}$$

continua

Quindi $\mathbb{E}Y_n \xrightarrow[n \to \infty]{} e^{-\frac{1}{2}}$