Cognome:.. Nome:..
Numero CFU:..................................

Data esame orale: ☐ 5 luglio 2012 ☐ 25 luglio 2012

Probabilità
Prof. L.Beghin

3 luglio 2012

Esercizio 1

Una persona tenta di collegarsi ripetutamente ad un server difettoso. La probabilità di riuscirci è, ad ogni tentativo (indipendentemente dagli altri) pari a p. Calcolare la probabilità dei seguenti eventi:

A = "riesce a collegarsi per la I volta al 4° tentativo"

B = "la III volta che riesce a collegarsi è al 7° tentativo"

C = A∩B

D = "tra l' 11° ed il 20° tentativo (estremi compresi) si collega esattamente 5 volte"

E = "si collega per la prima volta all' h° tentativo, sapendo che si è collegata per la III volta all' $(h+k)$° tentativo". Si dia una spiegazione intuitiva di quest'ultima probabilità.

Esercizio 2

Siano $X_1, X_2, ...X_n$ delle variabili aleatorie tra loro indipendenti e tutte con distribuzione esponenziale di parametro $\lambda > 0$. Si studi la convergenza in distribuzione (ed eventualmente in probabilità) della seguente successione:

$$Y_n = \frac{\max(X_1, ...X_n)}{\ln n}.$$

SOLUZIONI : $q = 1-p$

ES. 1

$P(A) = q^3 p$

$P(B) = p\binom{6}{2}p^2q^4 = \binom{6}{2}p^3q^4$

NO SI

X X X O . . O

X O

O X

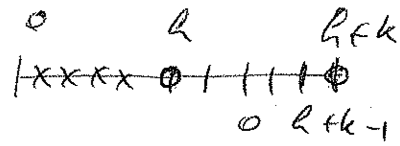
$P(C) = P(A \cap B) = 2 \cdot q^4 p^3$

$P(D) = \binom{10}{5}p^5q^5$

$$P(\text{I}° \text{ al } h° \mid \text{III al } (h+k)°) = \frac{P(\text{I al } h° \cap \text{III al } (h+k)°)}{P(\text{III}° \text{ al } (h+k)°)}$$

→ in analogia con C

$$= \frac{\cancel{p}\,\cancel{q^{h-1}} \cdot (k-1) \cdot \cancel{p^2}\,\cancel{q^{k-2}}}{\cancel{p}\binom{h+k-1}{2}\cancel{p^2}\,\cancel{q^{h+k-3}}}$$



→ in analogia con ev. B

$$= \frac{k-1}{\binom{h+k-1}{2}}$$

→ n° di modi in cui si può scegliere il "posto" del II° successo

→ n° di modi in cui si può avere 2 succ in $(h+k-1)$ prove indip.

ES. 2

$Y \in (0,+\infty)$ p.c. poiché $\ln n > 0$

$$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ 1 & y > 0 \end{cases}$$

$$\begin{aligned} P(Y_n < y) &= P(\max(X_1 \dots X_n) < y \ln n) \\ &= P(X_1 < y \ln n, \dots X_n < y \ln n) \\ &= \left(P(X_i < y \ln n)\right)^n \\ &= \left(1 - e^{-\lambda y \ln n}\right)^n \\ &= \left(1 - e^{\ln n^{-\lambda y}}\right)^n \\ &= \left(1 - n^{-\lambda y}\right)^n \longrightarrow \begin{cases} 0 & y \leq \frac{1}{\lambda} \\ 1 & y > \frac{1}{\lambda} \end{cases} \end{aligned}$$

Quindi $F_{Y_n}(y) \to F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq \frac{1}{\lambda} \\ 1 & y > \frac{1}{\lambda} \end{cases}$

$$\boxed{Y_n \xrightarrow[P]{d} \frac{1}{\lambda}}$$