Cognome:.............................. **Nome:**..................................
CFU:..
CORSO DI LAUREA..
Data orale:
☐ 14-6-2012.................☐ 5-7-2012.................☐ 24-7-2012

Probabilità
L.Beghin

12 giugno 2012

Esercizio 1

Supponiamo di avere n scatole apparentemente identiche. Una sola scatola contiene un premio, mentre le altre $n-1$ sono vuote. Un giocatore sceglie ripetutamente a caso una scatola, la apre e controlla se contiene il premio. Si calcoli il numero atteso di volte che deve pescare per avere il premio nei due casi:

i) ogni volta rimette a posto la scatola dopo averla controllata;
ii) scarta ogni scatola dopo averla controllata.

Esercizio 2

Sia X una variabile aleatoria esponenziale di parametro $\lambda > 1$. Si calcoli la distribuzione ed il valor medio della variabile aleatoria definita come

$$Y = \beta e^X, \qquad \beta \geq 0.$$

Esercizio 3

Sia Y la v.a. definita nell'es.2. Si studi la convergenza in distribuzione e quasi certa della seguente successione di v.a.

$$Z_n = \begin{cases} \frac{2\sqrt{n}Y}{1+\sqrt{n}}, & Y < n \\ Y^2, & Y \geq n \end{cases}.$$

SOLUZIONI $\boxed{\text{ES. 1}}$

X = n° volte che pesca

i) $p = \frac{1}{n}$ $\quad X \sim Geom(p)$

$$EX = \sum_{j=1}^{\infty} j \frac{1}{n}\left(\frac{n-1}{n}\right)^{j-1} = \frac{1}{n} \frac{1}{\left(1-\frac{n-1}{n}\right)^2} = n$$

usando la formula

$$\sum_{r=1}^{\infty} r x^r = \frac{x}{(1-x)^2}$$

ii) $P(X=1)=\frac{1}{n}$

$P(X=2)=\frac{\cancel{n-1}}{n}\,\frac{1}{\cancel{n-1}}=\frac{1}{n}$ $\Rightarrow P(X=j)=\frac{1}{n}$ $1\le j\le n$

$P(X=3)=\frac{\cancel{n-1}}{n}\cdot\frac{\cancel{n-2}}{\cancel{n-1}}\cdot\frac{1}{\cancel{n-2}}=\frac{1}{n}$

$$EX=\sum_{j=1}^{n} j\,\frac{1}{n}=\frac{1}{\cancel{n}}\,\frac{\cancel{n}(n+1)}{2}=\frac{n+1}{2}$$

$\boxed{\text{Es. 2}}$ $X\sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ $\lambda\ge 1$

$Y=\beta e^{X}$ $\beta>0$ $\Rightarrow Y\ge\beta$ p.c. (poiché $e^{X}\ge 1$)

per $y\ge\beta$

$$P(\beta e^{X}\le y)=P\left(e^{X}<\frac{y}{\beta}\right)$$
$$=P\left(X<\ln\frac{y}{\beta}\right)$$
$$=\lambda\int_0^{\ln\frac{y}{\beta}} e^{-\lambda x}\,dx$$
$$=1-e^{-\lambda\ln\left(\frac{y}{\beta}\right)}$$
$$=1-e^{\ln\left(\frac{y}{\beta}\right)^{-\lambda}}=1-\left(\frac{\beta}{y}\right)^{\lambda}$$

$$\Rightarrow F_Y(y)=\begin{cases}0 & y\le\beta\\ 1-\left(\frac{\beta}{y}\right)^{\lambda} & y>\beta\end{cases}$$

per $y=\beta$ è 0
per $y\to+\infty$ è 1 <u>OK</u>

$$f_Y(y)=\begin{cases}\beta^{\lambda}\lambda y^{-\lambda-1} & y>\beta\\ 0 & \text{altrove}\end{cases}$$

Si può ricavare anche con il teorema poiché $g(x)=\beta e^{x}$ è invertibile.

$$EY=\lambda\beta^{\lambda}\int_{\beta}^{+\infty}\frac{1}{y^{\lambda}}\,dy=\lambda\beta^{\lambda}\left[\frac{y^{-\lambda+1}}{-\lambda+1}\right]_{\beta}^{+\infty}\underset{\text{poiché }\lambda>1}{=}\frac{\lambda\beta^{\cancel{\lambda}}}{\lambda-1}\beta^{1-\cancel{\lambda}}=\frac{\lambda\beta}{\lambda-1}$$

$\boxed{\text{Es. 3}}$ per $n \to +\infty$ $\quad Z_n(\omega) = \begin{cases} \dfrac{2\sqrt{n}\, Y(\omega)}{1+\sqrt{n}} & Y < n \\ Y^2 & Y \geq n \end{cases}$

converge, per ogni ω, a $2Y(\omega)$ quindi

$$Z_n \xrightarrow{p.c.} 2Y = Z$$

$2Y \geq 2\beta$ p.c. poiché $Y \geq \beta$

Per trovare la distribuz. di $2Y = Z$:

$$F_Z(z) = P(Z < z) = P(2Y < z)$$

$$= P\left(Y < \frac{z}{2}\right) = \begin{cases} 0 & z \leq 2\beta \\ 1 - \left(\dfrac{\beta}{\frac{z}{2}}\right)^{\alpha} = 1 - \left(\dfrac{2\beta}{z}\right)^{\alpha} & z > 2\beta \end{cases}$$

Quindi $\boxed{Z_n \xrightarrow[i.d.]{p.c.} Z}$ con distrib.

Per verificare direttamente la conv. i.d. si poteva fare:

$$P(Z_n < z) = P(Z_n < z, Y < n) + P(Z_n < z, Y \geq n)$$

$$= P\left(\frac{2\sqrt{n}\,Y}{1+\sqrt{n}} < z, Y < n\right) + P(Y^2 < z, Y > n)$$

$$P(Y^2 < z, Y > n) = P(-\sqrt{z} < Y < \sqrt{z}, Y > n) = P(n < Y < \sqrt{z}) \Downarrow 0 \text{ per } n \to +\infty$$

Quindi

$$P(Z_n < z) = P\left(Y < \frac{z(1+\sqrt{n})}{2\sqrt{n}}, Y < n\right)$$

$$\xrightarrow[n \to +\infty]{} P\left(Y < \frac{z}{2}\right) = \begin{cases} 0 & z \leq 2\beta \\ 1 - \dfrac{\beta^{\alpha}}{\left(\frac{z}{2}\right)^{\alpha}} = 1 - \left(\dfrac{2\beta}{z}\right)^{\alpha} & z > 2\beta \end{cases}$$