SULUZIONI ESERCITAZIONE 27-4-2018

Esercizio n.1 Sia Y la variabile aleatoria 'numero di biglie blu estratte prima di estrarre la prima biglia verde'. Si ha

$$Y \in \{0, 1, 2, \dots, n\}, \qquad q.c.$$

Y ha distribuzione di probabilità

$$\begin{aligned}
\mathbb{P}(Y=0) &= \frac{2}{n+2},\\
\mathbb{P}(Y=1) &= \frac{n}{n+2}\frac{2}{n+1},\\
\mathbb{P}(Y=2) &= \frac{n}{n+2}\frac{n-1}{n+1}\frac{2}{n},\\
&\dots\\
\mathbb{P}(Y=j) &= \frac{2(n+1-j)}{(n+1)(n+2)}.
\end{aligned}$$

Si vede immediatamente che $\mathbb{P}(Y=j) \geq 0$ per $j = 0, 1, 2, \dots$ e che

$$\sum_{j=0}^{n} \mathbb{P}(Y=j) = \sum_{j=0}^{n} \frac{2(n+1-j)}{(n+1)(n+2)} = \frac{2(n+1)}{n+2} - \frac{2n(n+1)}{2(n+1)(n+2)} = 1.$$

Valore atteso è dato da

$$\mathbb{E}(Y) = \sum_{j=0}^{n} j\mathbb{P}(Y=j) = 2\sum_{j=0}^{n} j\frac{(n+1-j)}{(n+1)(n+2)} = \frac{n}{3}.$$

La funzione di ripartizione per $k = 1, \dots, n$ è data da

$$\mathbb{P}(Y<k) = \frac{2}{(n+1)(n+2)}\sum_{j=0}^{k-1}(n+1-j) = \frac{2k}{n+2} - \frac{2(k-1)k}{2(n+1)(n+2)} = \frac{2kn+2k-k^2+k}{(n+2)(n+1)}$$

e

$$F_Y(k) = \mathbb{P}(Y<k) = \begin{cases} 0 & k \leq 0,\\ \frac{2jn+3j-j^2}{(n+2)(n+1)} & k-1 < j \leq k,\ k = 1, 2\dots, n\\ 1 & k > n. \end{cases}$$

Esercizio n.2 La variabile aleatoria X 'vincita in euro del concorrente' ha distribuzione di probabilità

$$X \in \{0, 3, 9, 27, 81, 243\}, \qquad q.c.$$

$$\begin{aligned}
&\mathbb{P}(X=0) = (1-p)^5\\
&\mathbb{P}(X=3^j) = p(1-p)^{5-j}, \qquad j = 1, 2, 3, 4, 5.
\end{aligned}$$

Si vede immediatamente che $\mathbb{P}(X=j) \geq 0$ per $j = 0, 3, 9, 27, 81, 243$ e che

$$(1-p)^5 + \sum_{j=1}^{5}(1-p)^{5-j}p = (1-p)^5 + p\frac{1-(1-p)^5}{1-(1-p)} = 1.$$

Il valore atteso di X è dato da

$$\mathbb{E}(X) = p\sum_{j=1}^{5} 3^j(1-p)^{5-j} + 0 = 3p(1-p)^4\sum_{l=0}^{4}\left(\frac{3}{1-p}\right)^l = 3p(1-p)^4\frac{1-\left(\frac{3}{1-p}\right)^5}{1-\frac{3}{1-p}},$$

Date: May 8, 2018.

quindi per $p = \frac{1}{2}$,

$$\mathbb{E}(X) = \frac{3}{2^5}\frac{1-6^5}{1-6} = 145,8.$$

La funzione di ripartizione di X è

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ (1-p)^5 & 0 < x \leq 3, \\ (1-p)^5 + (1-p)^4 p & 3 < x \leq 9, \\ (1-p)^5 + (1-p)^4 p + (1-p)^3 p & 9 < x \leq 27, \\ (1-p)^5 + (1-p)^4 p + (1-p)^3 p + (1-p)^2 p & 27 < x \leq 81, \\ 1-p & 81 < x \leq 243, \\ 1 & x > 243. \end{cases}$$

Esercizio n.3 $Y \in (0,1)$ q.c.
Funzione di ripartizione e funzione di densità. *Primo metodo*:

$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y < y) = \mathbb{P}(\cos X < y) = \mathbb{P}(X > \arccos y) = 1 - \frac{2}{\pi}\arccos y \\ &= \begin{cases} 0 & y \leq 0, \\ 1 - \frac{2}{\pi}\arccos y & 0 < y \leq 1, \\ 1 & y > 1. \end{cases} \end{aligned}$$

$$f_Y(y) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}} 1_{\{y \in (0,1)\}}.$$

Secondo metodo:

$$f_Y(y) = f_X(g^{-1}(y)) \left| \frac{d}{dy} g^{-1}(y) \right|$$

dove

$$\frac{d}{dy} g^{-1}(y) = -\frac{1}{\sqrt{1-y^2}}$$

e

$$f_X(g^{-1}(y)) = \frac{2}{\pi} 1_{\{\arccos y \in (0,\pi/2)\}}$$

e quindi

$$f_Y(y) = \frac{2}{\pi\sqrt{1-y^2}} 1_{\{y \in (0,1)\}}.$$

Valore atteso. *Primo metodo*:

$$\mathbb{E}(Y) = \frac{2}{\pi}\int_0^1 \frac{y}{\sqrt{1-y^2}} dy = \frac{2}{\pi}[-(1-y^2)^{1/2}]_0^1 = \frac{2}{\pi}.$$

Secondo metodo:

$$\mathbb{E}(g(X)) = \int_0^{\frac{\pi}{2}} \cos x \frac{1}{\frac{\pi}{2}} dx = \frac{2}{\pi}[\sin x]_0^{\pi/2} = \frac{2}{\pi}.$$

Esercizio n.4 Imponiamo che l'integrale della denisità sia uguale ad 1:

$$1 = -\int_0^1 \log(x^k) dx = -k\int_0^1 \log(x) dx = -k[x\log x - x]_0^1 = k,$$

quindi $f_Z(z)$ è una densità per $k=1$. La variabile aleatoria Z ha funzione di ripartizione
$$F_Z(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0, \\ x - x\log x & 0 < x \leq 1, \\ 1 & x > 1, \end{cases}$$
infatti per $0 < x \leq 1$
$$F_Z(x) = -\int_0^x \log z dz = -[z\log z - z]_0^x = x - x\log x.$$
Funzione di densità di $Y = -\log Z$. *Primo metodo*:
$$\begin{aligned} F_Y(y) &= \mathbb{P}(Y < y) = \mathbb{P}(-\log Z < y) = \mathbb{P}(\log Z > -y) = \mathbb{P}(Z > \exp(-y)) = 1 - F_Z(\exp(-y)) \\ &= 1 - [\exp(-y) - \exp(-y)\log(\exp(-y))] \\ &= 1 - \exp(-y) - y\exp(-y). \end{aligned}$$
per $\exp(-y) \in (0,1)$ ossia per $y > 0$. Derivando si ottiene la densità ossia
$$f_Y(z) = ye^{-y}1_{\{y>0\}}.$$
Secondo metodo:
$$f_Y(z) = f_X(e^{-y})e^{-y}1_{\{e^{-y}\in(0,1)\}} = -\log(e^{-y})e^{-y}1_{\{y>0\}} = ye^{-y}1_{\{y>0\}}.$$
Y è distribuita come una esponenziale.