Esercitazione 27-4-2018

Esercizio n.1: In una scatola vi sono n biglie blu e 2 biglie verdi. Si estraggono ripetutamente una biglia dopo l'altra senza rimetterle nella scatola. Sia Y la variabile aleatoria definita come "numero di biglie blu estratte prima di estrarre la prima biglia verde"

i) Si calcoli la distribuzione di probabilità della v.a. Y (spettro e probabilità dei singoli valori);

ii) Si verifichi che si tratta di una distribuzione di probabilità ben definita;

iii) Si scriva la funzione di ripartizione di Y e se ne tracci il grafico

iv) Si calcoli $\mathbb{E}(Y)$.

Suggerimento: si ricordino la formula della somma dei primi n numeri naturali e la formula seguente

$$\sum_{j=1}^{n} j^2 = \frac{n(n+1)(2n+1)}{6}$$

Esercizio n.2: In un gioco a premi la vincita massima è pari 243 euro. Un concorrente deve rispondere a 5 domande, una dopo l'altra. Ad ogni risposta sbagliata il montepremi si riduce ad un terzo di quello del turno precedente. Alla prima risposta esatta il concorrente vince il montepremi rimasto. Se sbaglia tutte le risposte non vince nulla. Supponiamo che il concorrente risponda correttamente ad ogni domanda con probabilità pari a $p \in (0,1)$, indipendentemente dalle altre domande.

Sia X la vincita in euro di questo concorrente.

i) si calcoli la distribuzione di probabilità di X

ii) Si verifichi che si tratta di una distribuzione di probabilità ben definita;

iii) Si scriva la funzione di ripartizione di X e se ne tracci il grafico

iii) Si calcoli $\mathbb{E}(X)$, per $p = 1/2$.

Esercizio n.3:

Sia X una v.a. uniforme sull'intervallo $\left(0, \frac{\pi}{2}\right)$ e sia $Y = g(X) = \cos(X)$

i) Si calcoli la funzione di ripartizione, la funzione di densità con i due metodi conosciuti.

ii) Si calcoli il valore atteso di Y con i due metodi conosciuti (come $\mathbb{E}Y$, con la distribuzione ottenuta al punto i), e come $\mathbb{E}g(X)$)).

Esercizio n.4:

Sia Z una variabile aleatoria con la seguente funzione di densità:

$$f_Z(z) = \begin{cases} -\log(z^k), & z \in (0,1) \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

con $k \in \mathbb{R}$.

i) Si determini il valore di k tale che $f_Z(z)$ sia una densità,

ii) Si calcoli la funzione di ripartizione di Z.

iii) Si calcoli la distribuzione di $Y = -\log(Z)$ (nei due metodi conosciuti) e si indichi di quale v.a. nota si tratta.

Suggerimento: si ricorda che

$$\int \log x dx = x \log x - x$$