Cognome:............................... Nome:...................................
CFU:..
CORSO DI LAUREA...
Data orale............☐ 20-2-2012.................☐ 24-2-2012

Probabilità
L.Beghin - G.Salinetti

14 febbraio 2012

Esercizio 1
Un cinema multisala è dotato di 3 sale. Supponiamo che un giorno arrivino solo 4 persone. Si calcoli il valore atteso delle variabili definite come
i) numero di sale vuote;
ii) numero di sale con lo stesso numero di spettatori;
iii) numero di sale con più di uno spettatore.

Esercizio 2
Siano X e Y due v.a. indipendenti ed entrambe uniformi in $(0,1)$. Calcolare la distribuzione della v.a.

$$Z = -\frac{1}{\lambda}(\log X + \log Y).$$

Esercizio 3
Sia X una v.a. con funzione di ripartizione F_X. Sia inoltre Y_n una successione così definita

$$Y_n = \begin{cases} -\log n, & X \leq -\log n \\ X, & -\log n < X \leq \log n \\ \log n, & X > \log n \end{cases}$$

Studiare la convergenza in distribuzione e quasi certa della successione Y_n.

SOLUZIONI

Es. 1 Casi possibili

$$\# \Omega = C^R_{3,4} = \binom{3+4-1}{4}$$

$$\binom{6}{4} = \frac{6 \cdot 5}{2} = 15$$

	A	B	C
×	4	0	0
×	3	1	0
×	3	0	1
	2	2	0
	2	0	2
×	2	1	1
×	1	3	0
×	1	0	3
×	1	2	1
×	1	1	2

A	B	C	
0	0	4	✓
0	4	0	×
0	3	1	×
0	1	3	×
0	2	2	
0			

N_1 = n° sole vuote

N_2 = n° sole con stesso numero di persone

N_3 = n° sole con > 1 spett.

$P(N_1=0) = \frac{3}{15}$ $\quad P(N_1=1) = \frac{9}{15}$ $\quad P(N_1=2) = \frac{3}{15}$

$\mathbb{E}(N_1) = \frac{9}{15} + \frac{6}{15} = 1$

$P(N_2=0) = \frac{6}{15}$ $\quad P(N_2=2) = \frac{9}{15}$

$\mathbb{E}(N_2) = \frac{18}{15}$

$P(N_3=1) = \frac{12}{15}$ $\quad P(N_3=2) = \frac{3}{15}$

$\mathbb{E}(N_3) = \frac{12}{15} + \frac{6}{15} = \frac{18}{15}$

<u>ES. 2</u> $\quad X, Y \sim \mathrm{Unif}(0,1)$ indip.

$W_1 = -\frac{1}{\lambda}\log X \in (0,+\infty)$ p.c.

$W_2 = -\frac{1}{\lambda}\log Y \in (0,+\infty)$ p.c.

$$F_{W_1}(w) = P\left(-\frac{1}{\lambda}\log X < w\right)$$
$$= P(-\log X < \lambda w)$$
$$= P(\log X > -\lambda w) = P(X > e^{-\lambda w})$$
$$= 1 - F_X(e^{-\lambda w}) = 1 - e^{-\lambda w}$$
$\Rightarrow W_1 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$ e anche $W_2 \sim \mathrm{Exp}(\lambda)$

Quindi per la formula di convoluzione $Z = W_1 + W_2 \sim Gamma(2,1)$

ES. 3

X ha d.r. F_X

$$Y_n \xrightarrow{p.c.} X$$

Infatti $P\left\{\omega \in \Omega : \lim_{n \to +\infty} \left(X(\omega) \in (-\ln n, \ln n)\right)\right\}$

$$= P\left(\omega \in \Omega : X(\omega) \in (-\infty, +\infty)\right) = 1$$

Inoltre $Y_n \xrightarrow{d} X$ poiché $Y_n \xrightarrow{p.c.} X \Rightarrow Y_n \xrightarrow[p]{d} X$

Lo verifichiamo: $Y_n \in (-\ln n, \ln n)$ p.c. $\forall n$

$$F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & y \le -\ln n \\ ? & -\ln n < y < \ln n \\ 1 & y > \ln n \end{cases}$$

Lo studio per $y \in (-\ln n, \ln n)$

$$F_{Y_n}(y) = P\left(Y_n < y, (X \le -\ln n) \cup (-\ln n < X < \ln n) \cup (X > \ln n)\right)$$

$$= P(Y_n < y, X \le -\ln n) + P(-\ln n < X < \ln n, Y_n < y) + P(Y_n < y, X > \ln n)$$

$$= P(\overbrace{-\ln n < y}^{\Omega \to \text{poiché } y \in (-\ln n, \ln n)}, X \le -\ln n) + P(-\ln n < X < \ln n, X < y) + \underbrace{P(\ln n < y, X > \ln n)}_{\emptyset \to \text{poiché } y \in (-\ln n, \ln n)}$$

$$= P(X \le -\ln n) + P(-\ln n < X < y)$$

$$= \cancel{F_X(-\ln n)} + F_X(y) - \cancel{F_X(-\ln n)} \overset{\text{poiché } y < \ln n}{=} F_X(y) \Rightarrow X_n \xrightarrow{d} X$$