Cognome:.. Nome:..
Corso di Laurea:...

Probabilità
prof. L. Beghin
I Esonero - 17-11-2011
A

Esercizio 1

Al piano terra di un grattacielo ci sono 7 persone che attendono di salire sui tre ascensori disponibili, che fermano solo ai piani 20° e 30°. Ciascuno sceglie a caso uno degli ascensori. Al piano 20° da ciascun ascensore (non vuoto) scende una sola persona. Calcolare la probabilità che a quel piano scendano

1) una persona in tutto
2) due persone in tutto
3) tre persone in tutto

Al piano 30° devono scendere tutti quelli rimasti. Trovare la distribuzione di probabilità del numero di persone che scendono al 30°.

Esercizio 2

Sia X un variabile aleatoria con distribuzione esponenziale di parametro 1.

1) Calcolare la distribuzione della v.a.

$$Z = 1 - e^{-\alpha X}, \qquad \alpha > 0,$$

con i metodi conosciuti.

2) Calcolare il

$$\mathbb{E}\left[X\left(1 - e^{-\alpha X}\right)\right].$$

Cognome:... Nome:...
Corso di Laurea:...
CFU:..

Probabilità
prof. L. Beghin - G.Salinetti
Appello straordinario
A

Esercizio 1

Al piano terra di un grattacielo ci sono 7 persone che attendono di salire sui tre ascensori disponibili, che fermano solo ai piani 20° e 30°. Ciascuno sceglie a caso uno degli ascensori. Al piano 20° da ciascun ascensore (non vuoto) scende una sola persona. Calcolare la probabilità che a quel piano scendano

1) una persona in tutto
2) due persone in tutto
3) tre persone in tutto

Al piano 30° devono scendere tutti quelli rimasti. Trovare la distribuzione di probabilità del numero di persone che scendono al 30°.

Esercizio 2

Sia X un variabile aleatoria con distribuzione esponenziale di parametro 1.

1) Calcolare la distribuzione della v.a.

$$Z_n = 1 - e^{-\alpha_n X}, \qquad \alpha_n > 0,\ n \geq 1$$

con i metodi conosciuti.

2) Calcolare il

$$\mathbb{E}\left[X\left(1 - e^{-\alpha_n X}\right)\right].$$

3) **(No per 5CFU)** Studiare la convergenza della successione Z_n per $n \to \infty$, distinguendo i casi

i) $\alpha_n = n$
ii) $\alpha_n = 1/n$

SOLUZIONI

I° ESONERO 17-11-2011 (A)

Es. 1

1) $P\left(\text{scende 1 p.s. al } 20°\right) = P(2 \text{ esc. vuoti})$

$$= \frac{1}{3^7} \cdot 3 = \frac{1}{3^6}$$

2) $P\left(\text{scendono 2 p.s. al } 20°\right) = P(2 \text{ esc. pieni})$

$$= 3\, P(A \text{ e } B \text{ pieni})$$

$$= 3 \cdot \frac{2^7 - 2}{3^7}$$

n° casi in cui A o B è vuoto

3) $P\left(\text{scendono 3 p.s. al } 20°\right) = P(\text{no esc. vuoti})$

$$= 1 - \frac{1}{3^6} - \frac{2^7-2}{3^6} = \frac{3^6 - 2^7 + 1}{3^6}$$

X = "n° di persone che scendono al 30°"

$S_X = \{4, 5, 6\}$

$$P(X=4) = P\left(\text{scendono 3 p.s. al } 20°\right) = \frac{3^6 - 2^7 + 1}{3^6}$$

$$P(X=5) = P\left(\text{scendono 2 p.s. al } 20°\right) = \frac{2^7 - 2}{3^6}$$

$$P(X=6) = P\left(\text{scende 1 p.s. al } 20°\right) = \frac{1}{3^6}$$

Es. 2

$X \sim Exp(1) \qquad Z = 1 - e^{-\alpha X} \qquad \alpha > 0$

$Z \in (0,1)$ p.c.

1) $F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ ? & 0 < z \leq 1 \\ 1 & z > 1 \end{cases}$

$$F_Z(z) = P\left(1 - e^{-\alpha X} < z\right) = P\left(-e^{-\alpha X} < z - 1\right) = P\left(e^{-\alpha X} > 1 - z\right)$$

$$= P\left(-\alpha X > \ln(1-z)\right) = P\left(X < -\frac{\ln(1-z)}{\alpha}\right)$$

$$= 1 - e^{\frac{\ln(1-z)}{\alpha}} = 1 - e^{(\ln(1-z))^{1/\alpha}} = 1 - (1-z)^{1/\alpha}$$

$$f_z(t) = \begin{cases} \frac{1}{\alpha}(1-z)^{\frac{1}{\alpha}-1} & 0 < z < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

2) $$\mathbb{E}\left(X(1-e^{-\alpha X})\right) = \int_0^{+\infty} x(1-e^{-\alpha x})\, e^{-x}\, dx$$

$$= \int_0^{+\infty} x e^{-x}\, dx - \int_0^{+\infty} x e^{-(\alpha+1)x}\, dx$$

$$= 1 - \int_0^{+\infty} \frac{z}{(\alpha+1)^2} e^{-z}\, dz = 1 - \frac{1}{(\alpha+1)^2} = \frac{\alpha^2+2\alpha}{(\alpha+1)^2}$$

$z = (\alpha+1)x$

$x = \frac{1}{\alpha+1} z$

$dx = \frac{1}{\alpha+1} dz$

Cognome:.. Nome:..
Corso di Laurea:..

Probabilità
prof. L. Beghin - G.Salinetti
I Esonero - 17-11-2011
B

Esercizio 1

In un Internet point vi sono 8 persone che si connettono ad un sito, scegliendo a caso tra i 3 disponibili.

Dopo un'ora di connessione, da **ciascuno** dei siti a cui è arrivata almeno una connessione una persona interrompe il contatto. Calcolare la probabilità che:

A) dopo un'ora solo una persona in tutto (cioè nel complesso dei 3 siti)
B) due persone in tutto
C) tre persone in tutto
abbandonino la connessione.

Dopo due ore tutti gli utenti rimasti abbandonano i siti. Trovare la distribuzione di probabilità del numero di persone che lasciano la connessione dopo 2 ore.

Esercizio 2

Sia X un variabile aleatoria con distribuzione esponenziale di parametro 1.

1) Calcolare la distribuzione della v.a.

$$W = \frac{1}{1 - e^{-\beta X}}, \qquad \beta > 0$$

con i metodi conosciuti.

2) Calcolare il

$$\mathbb{E}\left[X\left(1 - \frac{1}{W}\right)\right].$$

I ESONERO - 17-11-2011 (B)

Es. 1

A) $P(\text{1 ps. esce dopo 1 ora}) = P(\text{2 sili vuoti})$

$= 3\,P(\text{A e B vuoti})$

$= 3 \cdot \frac{1}{3^8} = \frac{1}{3^7}$

B) $P(\text{2 ps. escono dopo 1 ora}) = P(\text{2 sili confettati})$

$= 3\,P(\text{A e B confettati})$

$= 3 \cdot \frac{2^8 - 2}{3^8}$ → casi in cui A o B resta vuoto

$= \frac{2^8 - 2}{3^7}$

c) $P(\text{3 ps. escono dopo 1 ora}) = 1 - \frac{1}{3^7} - \frac{2^8-2}{3^7} = \frac{3^7 - 2^8 + 1}{3^7}$

X = "n° persone che abbandonano dopo 2 ore"

$S_X = \{5, 6, 7\}$

$P(X=5) = P(\text{3 ps. escono dopo 1 ora}) = \frac{3^7 - 2^8 + 1}{3^7}$

$P(X=6) = P(\text{2 ps. escono dopo 1 ora}) = \frac{2^8 - 2}{3^7}$

$P(X=7) = P(\text{3 ps. escono dopo 1 ora}) = \frac{1}{3^7}$

Es. 2

$X \sim Exp(1)$ $\qquad W = \frac{1}{1 - e^{-\beta X}}$ $\quad \beta > 0$

$W \geq 1$ q.c.

$$F_W(w) = \begin{cases} 0 & w \leq 1 \\ ? & w > 1 \end{cases}$$

$$F_W(w) = P(W<w) = P\left(\frac{1}{1-e^{-\beta X}} < w\right) = P\left(1 < w\left(1-e^{-\beta X}\right)\right)$$

$$= P\left(e^{-\beta X} < \frac{w-1}{w}\right) = P\left(-\beta X < \ln\frac{w-1}{w}\right)$$

$$= P\left(X > \frac{1}{\beta}\ln\left(\frac{w-1}{w}\right)\right) = \int_{-\frac{1}{\beta}\ln\frac{w-1}{w}}^{+\infty} e^{-x}\,dx$$

$$= \left[-e^{-x}\right]_{-\frac{1}{\beta}\ln\frac{w-1}{w}}^{+\infty} = +e^{\frac{1}{\beta}\ln\frac{w-1}{w}} = \left(\frac{w-1}{w}\right)^{\frac{1}{\beta}} = \left(1-\frac{1}{w}\right)^{\frac{1}{\beta}}$$

verifiche

per $w=1$ $\quad F_W(1)=0$

$w\to+\infty$ $\quad F_W\to 1$

$$f_W(w) = \begin{cases} \frac{1}{\beta}\left(1-\frac{1}{w}\right)^{\frac{1}{\beta}-1}\frac{1}{w^2} & w\geq 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

~~APPELLO STRAORDINARIO~~

~~A vedi Esonero +~~

$$\mathbb{E}\left(X\left(1-\frac{1}{W}\right)\right) = \mathbb{E}\left(X\left(1-\frac{1}{1-e^{-\beta X}}\right)\right)$$

$$= \mathbb{E}\Big(X \quad \frac{}{1-e^{-\beta X}}$$

$$\mathbb{E}\left(X\left(1-\frac{1}{W}\right)\right) = \mathbb{E}\left(X\left(\cancel{1}-\cancel{1}+e^{-\alpha X}\right)\right)$$

$$= \mathbb{E}\left(Xe^{-\alpha X}\right)$$

$$= \int_0^{+\infty} x\, e^{-\alpha x - x}\, dx$$

$$= \int_0^{+\infty} x\, e^{-(\alpha+1)x}\, dx \qquad z = (\alpha+1)x \quad x = \frac{1}{\alpha+1} z \quad dx = \frac{1}{\alpha+1} dz$$

$$= \frac{1}{(\alpha+1)^2} \int_0^{+\infty} z\, e^{-z}\, dz = \frac{1}{(\alpha+1)^2}$$

APPELLO STRAORDINARIO

(A) vedi Esercizio + ES. 2 punto 3)

$$F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ 1-(1-z)^{1/\alpha_n} & 0 < z \le 1 \\ 1 & z > 1 \end{cases}$$

per $\alpha_n = n$

$$F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ 1-(1-z)^{1/n} & 0 < z \le 1 \\ 1 & z > 1 \end{cases} \longrightarrow F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ 0 & 0 < z \le 1 \\ 1 & z > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad Z_n \xrightarrow[p]{d} Z \overset{p.c.}{=} 1$$

per $\alpha_n = \frac{1}{n}$

$$F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ 1-(1-z)^{n} & 0 < z \le 1 \\ 1 & z > 1 \end{cases} \longrightarrow F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ 1 & z > 0 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad Z_n \xrightarrow[p]{d} Z \overset{p.c.}{=} 0$$

Cognome:.. Nome:..
Corso di Laurea:...

Probabilità
prof. L. Beghin
I Esonero - 17-11-2011
B

Esercizio 1
In un Internet point vi sono 8 persone che si connettono ad un sito, scegliendo a caso tra i 3 disponibili.

Dopo un'ora di connessione, da **ciascuno** dei siti a cui è arrivata almeno una connessione una persona interrompe il contatto. Calcolare la probabilità che dopo un'ora abbandonino la connessione:

A) solo una persona in tutto (cioè nel complesso dei 3 siti)
B) due persone in tutto
C) tre persone in tutto

Dopo due ore tutti gli utenti rimasti abbandonano i siti. Trovare la distribuzione di probabilità del numero di persone che lasciano la connessione dopo 2 ore.

Esercizio 2
Sia X un variabile aleatoria con distribuzione esponenziale di parametro 1.

1) Calcolare la distribuzione della v.a.

$$W = \frac{1}{1 - e^{-\beta X}}, \qquad \beta > 0$$

con i metodi conosciuti.

2) Calcolare il

$$\mathbb{E}\left[X\left(1 - \frac{1}{W}\right)\right].$$

Cognome:.. Nome:..
Corso di Laurea:..
CFU:

Probabilità
prof. L. Beghin - G.Salinetti
Appello straordinario - 17-11-2011
B

Esercizio 1

In un Internet point vi sono 8 persone che si connettono ad un sito, scegliendo a caso tra i 3 disponibili.

Dopo un'ora di connessione, da **ciascuno** dei siti a cui è arrivata almeno una connessione una persona interrompe il contatto. Calcolare la probabilità che dopo un'ora abbandonino la connessione:

A) solo una persona in tutto (cioè nel complesso dei 3 siti)
B) due persone in tutto
C) tre persone in tutto.

Dopo due ore tutti gli utenti rimasti abbandonano i siti. Trovare la distribuzione di probabilità del numero di persone che lasciano la connessione dopo 2 ore.

Esercizio 2

Sia X un variabile aleatoria con distribuzione esponenziale di parametro 1.

1) Calcolare la distribuzione della v.a.

$$W_n = \frac{1}{1-e^{-\beta_n X}}, \qquad \beta_n > 0,\ n \geq 1$$

con i metodi conosciuti.

2) Calcolare il

$$\mathbb{E}\left[X\left(1-\frac{1}{W_n}\right)\right].$$

3) **(No per 5CFU)** Studiare la convergenza della successione W_n per $n \to \infty$, distinguendo i casi

i) $\beta_n = n$
ii) $\beta_n = 1/n$

APPELLO STRAORDINARIO

B) vedi Esonero +

punto 3) ES. 2

$$F_{W_n}(w) = \begin{cases} 0 & w \leq \phi \\ \left(1-\frac{1}{w}\right)^{\frac{1}{\beta_n}} & w > 1 \end{cases}$$

per $\beta_n = n$

$$F_{W_n}(w) = \begin{cases} 0 & w \leq 1 \\ \left(1-\frac{1}{w}\right)^{\frac{1}{n}} & w > 1 \end{cases} \longrightarrow F_W(w) = \begin{cases} 0 & w \leq 1 \\ 1 & w > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow W_n \xrightarrow[d]{p} W \overset{p.c.}{=} 1$$

per $\beta_n = \frac{1}{n}$

$$F_{W_n}(w) = \begin{cases} 0 & w \leq 1 \\ (\underbrace{1-\frac{1}{w}}_{<1})^{n} & w > 1 \end{cases} \longrightarrow 0 \quad \forall w$$

quindi non converge