Cognome:.. Nome:..

Data esame orale: ☐ 23 gennaio ☐ 26 gennaio ☐ 20 febbraio

Probabilità
Prof. L.Beghin

II Prova di esonero - 10 gennaio 2012 (A)

Esercizio 1

Sia X una variabile aleatoria assolutamente continua, la cui distribuzione dipende da un parametro esso stesso aleatorio A. Si suppone che

$$P(X < x | A = a) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ 1 - x^{-a} & x > 1 \end{cases}$$

e che A sia distribuita come una Geometrica di parametro p. Calcolare

1) la distribuzione marginale della v.a. X.

2) $E(X| A = a)$ (che succede per $a = 1$?) e $E(X)$.

Esercizio 2

Siano X e Y due v.a. indipendenti ed entrambe esponenziali di parametro 1 e sia

$$Z = Y - X.$$

1) Calcolare la distribuzione di Z e la sua funzione caratteristica (si consiglia di sfruttare le proprietà della f.c.)

2) Calcolare valore atteso e varianza di Z.

3) Studiare la convergenza della successione

$$\frac{(Z_1 + ... + Z_n)^2}{2n}$$

dove le v.a. Z_i sono tra loro indipendenti e tutte con distribuzione uguale a quella della Z.

SOLUZIONI II ESONERO

10-1-2012

COMPITO A

ES. 1

1) $$P(X<x) = P(X<x \cap \Omega)$$

$$= P\left(X<x \cap \bigcup_{a=1}^{\infty}(A=a)\right)$$

$$= \sum_{a=1}^{\infty} P(X<x \mid A=a)\, P(A=a)$$

per $x>1$

$$= \sum_{a=1}^{\infty} (1-x^{-a})\, p\, q^{a-1}$$

$$= 1 - \frac{p}{q}\sum_{a=1}^{\infty}\left(\frac{q}{x}\right)^{a}$$

$\frac{q}{x}<1$

$$= 1 - \frac{p}{q}\left(\frac{1}{1-\frac{q}{x}} - 1\right) = 1 - \frac{px}{q(x-q)} + \frac{p}{q}$$

$$= \frac{\cancel{q}x - \cancel{q}^2 - \cancel{px} + \cancel{px} - \cancel{q}p}{\cancel{q}(x-q)} = \frac{x-q-p}{x-q} = \frac{x-1}{x-q}$$

$$\Longrightarrow \quad F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \le 1 \\ \frac{x-1}{x-q} & x>1 \end{cases}$$

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{\cancel{x}-q-\cancel{x}+1}{(x-q)^2} = \frac{p}{(x-q)^2} & x>1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

2) $$E(X \mid A=a) = \int_1^{+\infty} x\, f_{X|A=a}(x \mid A=a)\, dx$$

$$f_{X|A=a}(x|A=a) = \frac{d}{dx} P(X<x|A=a) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ a x^{-a-1} & x>1 \end{cases}$$

$$E(X|A=a) = a\int_1^{+\infty} x^{-a}\,dx = \frac{a}{-a+1} x^{\overset{\leq 0}{\overline{-a+1}}}\Big]_1^{+\infty}$$

dove $a \geq 1$

$$= \begin{cases} \infty & a=1 \\ \frac{a}{a-1} & a>1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad E(X) = E(E(X|A=a)) = \sum_{a=1}^{\infty} E(X|A=a) P(A=a)$$

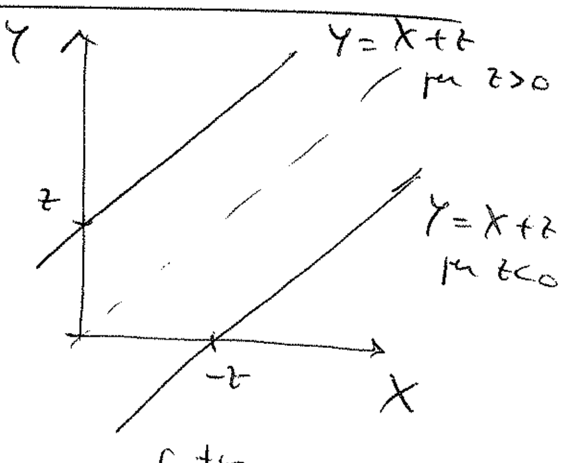
$$= \infty$$

~~3)~~ $\cancel{E\left((X-q)^2 e^{-X}\right) = \int_1^{+\infty} \frac{p}{(x-q)^2}(x-q)^2 e^{-x}\,dx}$

$\cancel{= p\left[-e^{-x}\right]_1^{+\infty} = \frac{p}{e}}$

ES. 2

$z \in (-\infty, +\infty)$



1) $P(Z<z) = P(Y<X+z)$

per $z>0$

$$= \int_0^{+\infty} dx \int_0^{x+z} dy\, e^{-x-y}$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-x}\left[-e^{-y}\right]_0^{x+z} dx = \int_0^{+\infty} e^{-x}dx - e^{-z}\int_0^{+\infty} e^{-2x}dx$$

$$= 1 - e^{-z}\left(-\frac{e^{-2x}}{2}\right]_0^{+\infty} = 1 - \frac{e^{-z}}{2}$$

per $z<0$

$$= \int_{-z}^{+\infty} dx \int_0^{x+z} dy\, e^{-x-y} = \int_{-z}^{+\infty} dx\, e^{-x}\left(1 - e^{-x-z}\right)$$

$$= \int_{-t}^{+\infty} dx\, e^{-x} - \int_{-t}^{+\infty} e^{-t} e^{-2x}\, dx = \left[-e^{-x}\right]_{-t}^{+\infty} - e^{-t}\left[-\frac{e^{-2x}}{2}\right]_{-t}^{+\infty}$$

$$= e^{+t} - \frac{e^{t}}{2} = \frac{e^{t}}{2}$$

$$\Rightarrow \boxed{f_Z(z) = \frac{e^{-|z|}}{2} \qquad z \in (-\infty, +\infty)}$$

$$H_Z(u) = H_Y(u) \cdot H_X(-u) = \frac{1}{1-iu} \cdot \frac{1}{1+iu} = \frac{1}{1+u^2} \qquad u \in \mathbb{R}$$

infatti è $\displaystyle\int_0^{+\infty} e^{iux} e^{-x}\, dx = \frac{1}{1-iu}$ la f.c. dell'Exp(1)

2) $$EZ = \frac{1}{i} \frac{d}{du} H_Z(u)\Big|_{u=0} = \frac{1}{i} \cdot \left(-\frac{2u}{1+u^2}\right)\Big|_{u=0} = 0$$

oppure $E(Z) = E(Y) - E(X) = 0$

$$EZ^2 = -\frac{d^2}{du^2} H_Z(u)\Big|_{u=0} = -\frac{-2(1+u^2)+4u^2}{(1+u^2)^2}\Big|_{u=0} = 2$$

$V(Z) = V(Y) + V(X) = 1 + 1 = 2$

3) $$\boxed{\left(\frac{Z_1 + \dots + Z_n}{\sqrt{2n}}\right)^2 \xrightarrow{d} \chi^2(1)}$$ via T.L.C.

Infatti Z_i sono i.i.d e $E(Z)=0$ $V(Z)=2$

$$\Rightarrow \frac{Z_1 + \dots + Z_n}{\sqrt{2n}} \xrightarrow{d} N(0,1)$$. Si può applicare il Teor. delle funz. cont. e il quadrato di una normale standard è un $\chi^2(1)$.

Cognome:... Nome:...

Data esame orale: ☐ 23 gennaio ☐ 26 gennaio ☐ 20 febbraio

Probabilità
Prof. L.Beghin

II Prova di esonero - 10 gennaio 2012 (B)

Esercizio 1

Sia Y una variabile aleatoria assolutamente continua, la cui distribuzione dipende da un parametro esso stesso aleatorio K. Si suppone che

$$P(Y < y | K = k) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ e^{-\frac{k}{y}} & y > 0 \end{cases}$$

e che K sia una v.a. distribuita come una Geometrica di parametro p. Calcolare

1) la distribuzione marginale della v.a. Y.

2) $E(Y | K = k)$ e $E(Y)$ [si ricorda che $\Gamma(0) = \infty$]

Esercizio 2

Si consideri la seguente successione

$$W_n = \frac{(X_1 + ... + X_n)^2}{2n}$$

e si supponga che le v.a. X_i siano tra loro indipendenti e tutte con distribuzione uguale a quella della variabile

$$X = Y - Z.$$

Le variabili Y e Z sono indipendenti e identicamente distribuite con distribuzione $Exp(1)$.

1) Calcolare la distribuzione di X e la sua funzione caratteristica (si consiglia di sfruttare le proprietà della f.c.)

2) Calcolare valore atteso e varianza di X.

3) Studiare la convergenza della successione $\{W_n\}_{n\geq 1}$ per $n \to \infty$.

COMPITO B

1) $P(Y<y) = P\left(Y<y, \bigcup_{k=1}^{\infty}(K=k)\right)$

$$= \sum_{k=1}^{\infty} P(Y<y \mid K=k)\, P(K=k)$$

per $y>0$ $\quad = \sum_{k=1}^{\infty} e^{-\frac{k}{y}} p q^{k-1} = \frac{p}{q} \sum_{k=1}^{\infty} \left(\frac{q}{e^{1/y}}\right)^k$

$\frac{q}{e^{1/y}}<1$ $\quad = \frac{p}{q}\left(\frac{1}{1-\frac{q}{e^{1/y}}} - 1\right) = \cancel{\frac{p}{q}} \frac{\cancel{e^{1/y} - e^{1/y} + q}}{e^{1/y}-q} = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ \frac{p}{e^{1/y}-q} & y>0 \end{cases}$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \begin{cases} \frac{p e^{1/y}}{(e^{1/y}-q)^2} \frac{1}{y^2} & y>0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

2) $E(Y \mid K=k) = \int_0^{+\infty} y \, f_{Y|K=k}(y \mid K=k)\, dy$

$f_{Y|K=k}(y \mid K=k) = \frac{d}{dy} P(Y<y \mid K=k)$

$$= \begin{cases} \frac{k}{y^2} e^{-\frac{k}{y}} & y>0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

$E(Y \mid K=k) = k \int_0^{+\infty} \frac{1}{y} e^{-\frac{k}{y}}\, dy$ $\qquad \frac{k}{y} = t \quad y = \frac{k}{t}$

$dy = -\frac{k}{t^2} dt$

$$= \cancel{k} \int_0^{+\infty} \frac{t}{\cancel{k}} \frac{k}{t^2} e^{-t}\, dt$$

$$= k \int_0^{+\infty} t^{-1} e^{-t}\, dt = k \cdot \Gamma(0) = \infty$$

$\Rightarrow E(Y) = E(E(Y \mid K=k)) = \infty$