Cognome:.................... Nome:...
Matricola:.......................................
Data orale: ....☐ 13-9-2018..........☐ 21–9-2018

Probabilità e Laboratorio di Probabilità
Prof. L.Beghin
11–9-2018

Esercizio 1

Ho n chiavi (tutte diverse) di cui 1 sola apre il cancello. Se riesco ad aprire il cancello mi trovo di fronte la porta di casa con serratura a combinazione con 6 cifre. Mi ricordo soltanto che due cifre sono 0, due sono 4 e due sono 5, ma non ricordo l'ordine. Calcolare la probabilità:

1. che riesca ad aprire il cancello scegliendo una sola chiave a caso.
2. che riesca ad entrare in casa dopo aver aperto anche il cancello scegliendo una chiave a caso.
3. che riesca ad entrare in casa dopo aver aperto anche il cancello scegliendo due chiavi a caso senza ripetizione.
4. che riesca ad entrare in casa dopo aver aperto anche il cancello scegliendo due chiavi a caso con ripetizione.

Esercizio n.2

Siano $X_1, ...X_n$ v.a. indipendenti con distribuzione esponenziale di parametro $\lambda > 1$.

1. Studiare la convergenza, per $n \to +\infty$, della successione
$$W_n = \frac{n}{e^{X_1} + ... + e^{X_n}}.$$
2. Calcolare la distribuzione della v.a. $Y = e^X$.
3. Studiare la convergenza, per $n \to +\infty$, della successione
$$Z_n = \frac{e^{X_1} + ... + e^{X_n} - a_n}{\sqrt{b_n}}$$
calcolando le costanti a_n e b_n in modo opportuno.

SOLUZIONI

ES. 1

A = "apro il cancello con 1 chiave"
B = "apro la porta"
A_i = "apro il cancello alla chiave i-esima"

i) $P(A) = \frac{1}{n}$

ii) $$P(B) = P(B \cap (A \cup A^c)) = P(B \cap A) + \underbrace{\cancel{P(B \cap A^c)}}_{=0}$$

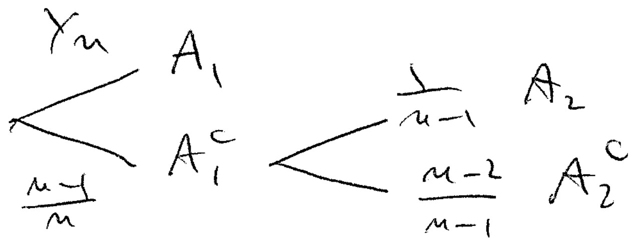
$$= P(B|A)\,P(A)$$

$$= \frac{1}{n}\,\frac{1}{\frac{6!}{2!\,2!\,2!}} = \frac{8}{720 \cdot n} = \frac{1}{90\, n}$$

iii) $$P(B) = P((B \cap A_1) \cup (B \cap A_1^c \cap A_2))$$

$$= P(B \cap A_1) + P(B \cap A_1^c \cap A_2)$$

$$= \frac{1}{90\, n} + \frac{1}{90} \cdot \frac{\cancel{n-1}}{n} \cdot \frac{1}{\cancel{n-1}} = \frac{2}{90\, n} = \frac{1}{45\, n}$$



iv) $$P(B) = \frac{1}{90\, n} + \frac{1}{90} \cdot \frac{n-1}{n} \cdot \frac{1}{n} = \frac{1}{90} \cdot \frac{2n-1}{n^2}$$

ES. 2

i) $$W_n = \frac{n}{\sum_{i=1}^{n} e^{X_i}} \xrightarrow[q.c.]{P} \frac{1}{E(e^X)}$$

applicando la LFGN e il teorema delle funzione continue (di una successione convergente)

$$E(e^X) = \lambda \int_0^{+\infty} e^{x} e^{-\lambda x}\, dx = \lambda \left[\frac{e^{(1-\lambda)x}}{1-\lambda} \right]_0^{+\infty}$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha-1} \implies \boxed{W_n \xrightarrow{p.c.} \frac{\alpha-1}{\alpha}}$$

perché $\alpha > 1$

ii) $Y = e^X \in (1, +\infty)$ q.c.

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 1 \\ ? & y > 1 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = P(e^X < y) = P(X < \log y)$$

$$= \int_0^{\log y} \alpha e^{-\alpha x}\, dx$$

$$= \frac{\alpha}{\alpha}\left[-e^{-\alpha x}\right]_0^{\log y} = 1 - y^{-\alpha}$$

$$\boxed{F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le 1 \\ 1 - y^{-\alpha} & y > 1 \end{cases}}$$

infatti $F_Y(1^+) = 0$

$\lim_{y \to +\infty} F_Y(y) = 1$

iii) $$Z_n = \frac{\sum_{i=1}^n e^{X_i} - a_n}{\sqrt{b_n}} \xrightarrow{d} Z \sim N(0,1)$$

per il TLC (siamo nelle condizioni ideali: stessa distribuzione e dato che $E e^X < \infty$). Resta da calcolare la $V(e^X)$

$$E(e^{2X}) = E(Y^2) = \alpha \int_1^{+\infty} y^2 y^{-\alpha-1}\, dy = \alpha \int_1^{+\infty} y^{1-\alpha}\, dy$$

$$= \frac{\alpha y^{2-\alpha}}{2-\alpha}\Big]_1^{+\infty}$$

Devo distinguere 2 casi: $\underline{1<\alpha<2}$ $E(e^{2X}) = +\infty$

pertanto $V(e^{2X}) = +\infty$

e non c'è convergenza

$\underline{\alpha>2}$ $E(e^{2X}) = \frac{\alpha}{\alpha-2}$

Quindi, per $\alpha>2$, $$Z_n = \frac{\sum e^{X_i} - n\frac{\alpha}{\alpha-1}}{\sqrt{\frac{n\alpha}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}}}$$

infatti $a_n = \frac{n\alpha}{\alpha-1}$

$$b_n = n\left(\frac{\alpha}{\alpha-2} - \frac{\alpha^2}{(\alpha-1)^2}\right) = n\,\frac{\cancel{\alpha^3}+\alpha-\cancel{2\alpha^2}-\cancel{\alpha^3}+\cancel{2\alpha^2}}{(\alpha-1)^2(\alpha-2)}$$