Esercitazione 18-12-2017

Esercizio n.1:

Siano X_1,...,X_n, ... v.a. indipendenti e identicamente distribuite con distribuzione

$$P(X = e) = P(X = 1/e) = \frac{1}{2}$$

e sia, per ogni $n \in \mathbb{N}$

$$Y_n = (X_1 \cdot \ldots \cdot X_n)^{1/\sqrt{n}}$$

Studiare la convergenza della successione $\{Y_n\}_{n \geq 1}$.

Esercizio n.2:

Siano X e Y v.a. indipendenti e con distribuzione rispettivamente uniforme in $(0, 1)$ ed esponenziale di parametro 1. Determinare la distribuzione della v.a.

$$Z_n = \frac{nX}{nX + Y}, \qquad n \in \mathbb{N}$$

e studiarne la convergenza nelle sue varie forme (separatamente).

Esercizio n.3:

Sia data la successione di v.a. $\{Y_n\}_{n \geq 1}$ con

$$Y_n = \frac{1}{n^\alpha} (X_1 + 2X_2 + \ldots + nX_n),$$

dove $X_1, \ldots, X_n \ldots$ sono v.a. i.i.d. con distribuzione normale standard e α è un numero reale. Trovare la distribuzione di probabilità di Y_n e il limite per $n \to \infty$.

Esercizio n.4:

Siano $X_{n,1}, \ldots, X_{n,n}$ indipendenti con distribuzione esponenziale di parametro n, per ogni $n \in \mathbb{N}$. Trovare la distribuzione di probabilità di

$$Y_n = n \max(X_{n,1}, \ldots, X_{n,n}) - \log n$$

e studiarne la convergenza in distribuzione.

3. Siano date le v.a. $X_1, X_2, \ldots, X_n, \ldots$, indipendenti e somiglianti con distribuzione

$$P(X_n = \mathrm{e}) = P(X_n = 1/\mathrm{e}) = \frac{1}{2}.$$

E sia, per ogni $n \in \mathbb{N}$,

$$Y_n = (X_1 \cdot X_2 \cdots X_n)^{1/\sqrt{n}}.$$

Studiare la convergenza in distribuzione ~~della successione $\log Y_n$ e~~ della successione Y_n.

---

giustificare tutti i passaggi in modo adeguato

$\log X_n \sim \mathrm{Unif}\{-1, 1\}$, $\mathbb{E}(\log X_n) = 0$, $\mathbb{V}\mathrm{ar}(\log X_n) = 1$.

E le v.a. X_n sono quindi i.i.d. con media e varianza finite. Dal teorema centrale di convergenza segue che:

$$\boxed{\log Y_n = \frac{\log X_1 + \cdots + \log X_n}{\sqrt{n}} \xrightarrow{\ \mathrm{d}\ } \log Y = Z \sim \mathcal{N}(0, 1)}$$

Poiché la convergenza in distribuzione si conserva sotto una trasformazione continua,

$$\boxed{Y_n \xrightarrow{\ \mathrm{d}\ } Y = \mathrm{e}^Z \sim F}.$$

La distribuzione limite si chiama "Lognormale(0,1)". Troviamone funz. di ripartiz. F e densità f.

$\forall y > 0,\ F(y) = P(\mathrm{e}^Z < y) = P(Z < \log y) = F_{\mathcal{N}(0,1)}(\log y)$

$$\Longrightarrow\ f(y) = f_{\mathcal{N}(0,1)}(\log y) y^{-1} = \boxed{\frac{1}{\sqrt{2\pi}} y^{-1} \mathrm{e}^{-\log^2 y/2},\ y > 0}$$

3. Siano X e Y due v.a. indipendenti aventi rispettivamente distribuzione uniforme in $(0,1)$ ed esponenziale di parametro 1. Determinare la distribuzione della v.a.

$$Z_n = \frac{nX}{nX+Y},\ n \in \mathbb{N},$$

e studiarne la convergenza per $n \longrightarrow +\infty$.

---

giustificare tutti i passaggi in modo adeguato

La convergenza quasi certa è immediata:

q.c. $Z_n(\omega) = \dfrac{nX(\omega)}{nX(\omega)+Y(\omega)} \xrightarrow[n\to+\infty]{} 1$

cioè $\boxed{Z_n \xrightarrow{\text{q.c.}} 1}$

Troviamo la funzione di ripartizione di Z_n:

$$Z_n \in (0,1) \implies F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0 \\ ?, & 0 < z < 1 \\ 1, & z \ge 1 \end{cases}$$

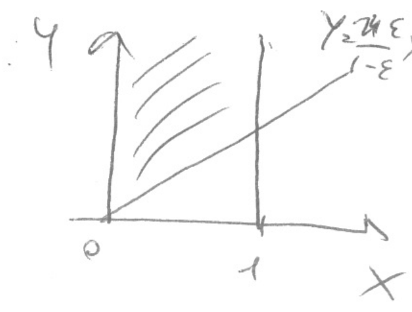
$$\forall z \in (0,1),\ F_{Z_n}(z) =$$
$$= P(Z_n < z) = P\left(\frac{nX}{nX+Y} < z\right) = P(Y > n(1/z-1)X) = \int_0^1 P(Y > n(1/z-1)x)\mathrm{d}x$$
$$= \int_0^1 \mathrm{e}^{-n(1/z-1)x}\mathrm{d}x = \frac{1-\mathrm{e}^{-n(1/z-1)}}{n(1/z-1)}$$

Riassumendo: $\boxed{F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 0, & z \le 0 \\ \dfrac{1-\mathrm{e}^{-n(1/z-1)}}{n(1/z-1)}, & 0 < z < 1 \\ 1, & z \ge 1 \end{cases}} \xrightarrow[n\to+\infty]{} \begin{cases} 0, & z < 1 \\ 1, & z \ge 1 \end{cases} \simeq F_1(z)$

Convergenza i.p.:

$Z_n \in (0,1)$ q.c.

$$P(|Z_n - 1| > \varepsilon) = P(-Z_n + 1 > \varepsilon) = P(Z_n < 1-\varepsilon)$$
$$\overset{\wedge}{0}$$
$$= P\left(\frac{nX}{nX+Y} < 1-\varepsilon\right)$$
$$= P(nX < (1-\varepsilon)(nX+Y))$$
$$= P(n\varepsilon X < (1-\varepsilon)Y)$$
$$= P\left(Y > \frac{n\varepsilon}{1-\varepsilon}X\right) \quad \text{per } \varepsilon < 1.$$
$$= \int_0^1 \left(\int_{\frac{\varepsilon n}{1-\varepsilon}x}^{+\infty} e^{-y}\,dy\right) dx$$



$$= \int_0^1 \cancel{dx} \left[-e^{-z} \right]_{\frac{\varepsilon n}{1-\varepsilon} x}^{+\infty} dx$$

$$= \int_0^1 e^{-\frac{\varepsilon n}{1-\varepsilon} x} dx$$

$$= \left[-e^{-\frac{\varepsilon n}{1-\varepsilon} x} \cdot \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon n} \right]_0^1 = \frac{1-\varepsilon}{\varepsilon n} \left(1 - e^{-\frac{\varepsilon n}{1-\varepsilon} x} \right) \xrightarrow[n \to +\infty]{} 0$$

$$\Rightarrow \quad Z_n \xrightarrow{P} 1$$

$\ldots n \quad \varepsilon > 1 \qquad P\left(Y < \frac{n\varepsilon}{1-\varepsilon} X \right) = 0$

3. Sia data la successione di v.a. $\{Y_n;\ n \geq 1\}$ definita da

$$Y_n = \frac{1}{n^\alpha}(X_1 + 2X_2 + \cdots + nX_n),$$

dove $X_1, \ldots, X_n, \ldots$ sono i.i.d. con distribuzione normale standardizzata e α è un numero reale. Trovare la distribuzione di probabilità di Y_n e discuterne il limite in distribuzione al variare di α.

---

giustificare tutti i passaggi in modo adeguato

La v.a. Y_n, combinazione lineare di variabili normali, ha distribuzione normale:

$\boxed{Y_n \sim \mathcal{N}(0, \sigma_n^2)}$

dove

$$\sigma_n^2 = \frac{1}{n^{2\alpha}}\left(1 + 2^2 + \cdots + n^2\right) = \boxed{\frac{1}{6}\frac{n(n+1)(2n+1)}{n^{2\alpha}}} \sim \frac{n^3}{3n^{2\alpha}} \longrightarrow \begin{cases} +\infty, & \alpha < 3/2 \\ 1/3, & \alpha = 3/2 \\ 0, & \alpha > 3/2 \end{cases}$$

$$F_{Y_n}(y) = F_{\mathcal{N}(0,1)}\left(\frac{y-0}{\sigma_n}\right) \longrightarrow \begin{cases} 1/2, & \alpha < 3/2 \\ F_{\mathcal{N}(0,1/3)}(y), & \alpha = 3/2 \\ F_0(y), & \alpha > 3/2 \end{cases}$$

Riassumendo:

$$\boxed{\begin{array}{lll} Y_n \text{ non ha limite in distribuzione,} & & \alpha < 3/2 \\ Y_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Y \sim \mathcal{N}(0, 1/3), & & \alpha = 3/2 \\ Y_n \xrightarrow[\mathrm{p}]{\mathrm{d}} 0, & & \alpha > 3/2 \end{array}}$$

3. Siano, per ogni $n \in \mathbb{N}$, $X_{n,1}, X_{n,2}, \dots, X_{n,n}$, n v.a. indipendenti e somiglianti aventi distribuzione esponenziale di parametro n. Trovare la distribuzione di probabilità della v.a.

$$Y_n = n \max\{X_{n,1}, \dots, X_{n,n}\} - \log n$$

e studiare la convergenza in distribuzione della successione $\{Y_n\}$.

---

giustificare tutti i passaggi in modo adeguato

$Y_n \in (-\log n, +\infty)$ q.c.

$$\forall y > -\log n,\ F_{Y_n}(y) = P(n \max < \log n + y) = P\left(\max < \frac{\log n + y}{n}\right)$$

$$= \left[F_{X_{n,i}}\left(\frac{\log n + y}{n}\right)\right]^n = \left(1 - \mathrm{e}^{-(\log n + y)}\right)^n = \left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-y}}{n}\right)^n.$$

Riassumendo

$$\boxed{F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0, & y \leq -\log n \\ \left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-y}}{n}\right)^n, & y > -\log n \end{cases}} \overset{\text{def.nte}}{=} \left(1 - \frac{\mathrm{e}^{-y}}{n}\right)^n \xrightarrow[n \to +\infty]{} \boxed{F(y) = \mathrm{e}^{-\mathrm{e}^{-y}}}$$

Quindi $\boxed{Y_n \xrightarrow{\mathrm{d}} Y \sim F}$

Quì sotto il grafico di F e quello della sua densità $f(y) = \mathrm{e}^{-(y + \mathrm{e}^{-y})}$