Esercitazione 4-12-2017

Esercizio n.1:

Marco attende alla fermata dell'autobus due amici, che viaggiano sulle linee 1 e 2. Quando anche il secondo amico arriva, se ne va con loro. Sia X_i la v.a. "attesa dell'amico sull'autobus i-esimo", per $i = 1, 2$. Supponendo che la densità congiunta del vettore aleatorio (X_1, X_2) sia

$$f_{X_1,X_2}(x_1, x_2) = \begin{cases} 3e^{-(x_1+3x_2)}, & x_1, x_2 > 0 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

calcolare:

i) la densità di probabilità della v.a. "istante in cui se ne vanno"

ii) il tempo medio di attesa complessiva

iii) le v.a. X_1 e X_2 sono tra loro indipendenti?

Esercizio n.2:

Siano X e Y v.a. esponenziali di parametri rispettivamente λ e μ, indipendenti tra loro. Siano inoltre $U = \min(X, Y)$ e $V = \max(X, Y)$.

Dimostrare che U e $W = V - U$ sono v.a. indipendenti tra loro.

Esercizio n.3:

Siano U e V v.a. indipendenti e uniformemente distribuite in $(0, 1)$.

i) Calcolare la distribuzione di probabilità di U^n

ii) Calcolare la probabilità che V sia minore di U^n

Esercizio n.4:

In un segmento di lunghezza 1 si sceglie un punto di ascissa aleatoria X, con densità

$$f_X(x) = \begin{cases} 2x, & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

Tra i due segmenti così individuati se ne sceglie uno a caso lanciando una moneta regolare.

i) Trovare la distribuzione di probabilità della v.a. Z="lunghezza del segmento scelto"

ii) Come cambia la soluzione del problema i) se la v.a. X è una $Beta\left(\frac{1}{2}, \frac{1}{2}\right)$ ovvero

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{1}{\pi}x^{-1/2}(1-x)^{-1/2}, & 0 < x < 1 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

SOLUZIONI

ES.1 Si veda es. 2 dello SCRITTO 17-2-2016

ES.2 $X \sim Exp(\lambda)$ $\quad Y \sim Exp(\mu)$

$U = \min(X,Y) \qquad V = \max(X,Y)$

$W = V - U \in (0,+\infty)$ P.c.

$P(W \geq w, U < u) = P(V-U \geq w, U<u)$ per $w \geq 0$

$= P(V-U \geq w, \min(X,Y) < u, X<Y) +$

$+ P(V-U \geq w, \min(X,Y)<u, X \geq Y)$

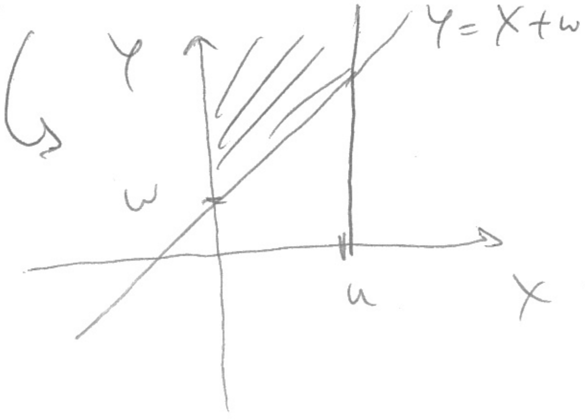
$= P(Y-X \geq w, X<u, X<Y) + P(X-Y \geq w, Y<u, X \geq Y)$

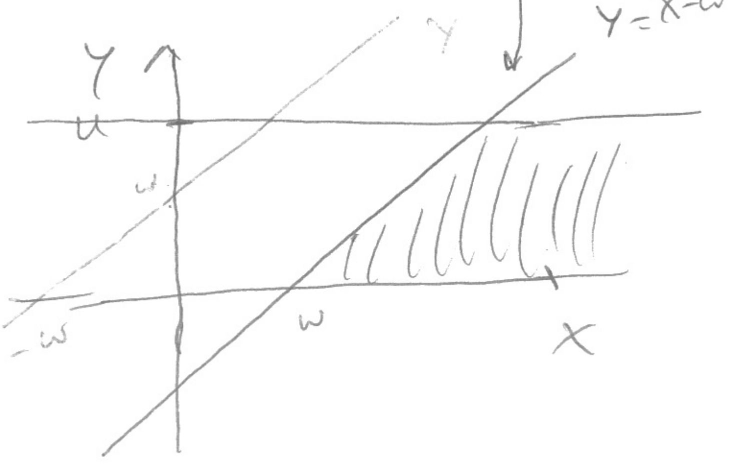
implica $\qquad\qquad$ implica

poiché $\{Y \geq X+w\} \subset \{Y > X\}$ per $w \geq 0$

e $\{X \geq Y+w\} \subset \{X \geq Y\}$

$= P(Y \geq X+w, X<u) + P(X \geq Y+w, Y<u)$





$$= \int_0^u \lambda e^{-\lambda x}\left(\int_{x+w}^{+\infty} \mu e^{-\mu y}\,dy\right)dx + \int_0^u \mu e^{-\mu y}\left(\int_{y+w}^{+\infty} \lambda e^{-\lambda x}\,dx\right)dy$$

il II° si ottiene dal primo scambiando λ con μ

$$= \int_0^u \lambda e^{-\lambda x}\left[-e^{-\mu y}\right]_{x+w}^{+\infty}dx + \int_0^u \mu e^{-\mu y}\left[-e^{-\lambda x}\right]_{y+w}^{+\infty}dy$$

$$= \frac{\lambda}{\lambda+\mu}e^{-\mu w}\left(1-e^{-(\lambda+\mu)u}\right) + \frac{\mu}{\lambda+\mu}e^{-\lambda w}\left(1-e^{-(\lambda+\mu)u}\right)$$

$$= \frac{\lambda e^{-\mu w}+\mu e^{-\lambda w}}{\lambda+\mu}\left(1-e^{-(\lambda+\mu)u}\right)$$

$$P(W\geq w) = \lim_{u\to+\infty} P(W\geq w, U<u) = \frac{\lambda e^{-\mu w}+\mu e^{-\lambda w}}{\lambda+\mu}$$

Invece $P(U<u) = 1-P(U\geq u) = 1-P(X\geq u, Y\geq u)$

$$= 1-P(X\geq u)P(Y\geq u)$$

$$= 1-e^{-\lambda u-\mu u} = 1-e^{-(\lambda+\mu)u}$$

Quindi le variabili W e U sono indipendenti

perché $P(W\geq w, U<u) = P(W\geq w)\,P(U<u)$

<u>Es. 3</u> si vede es. 2 (punti i) e ii)) SCRITTO 13-9-2017

<u>Es. 4</u> si vede es. 1 SCRITTO 14-1-2010