Esercitazione 20-11-2017

Esercizio n.1: Sia X una v.a. esponenziale di parametro $\lambda > 0$.

i) Calcolare la distribuzione di probabilità della v.a.$Y = e^{kX}$, al variare di $k \in \mathbb{R}$

ii) Determinare per quali valori di λ esiste il $\mathbb{E}Y$.

Esercizio n.2:

Sia X una v.a. con densità

$$f_X(x) = \begin{cases} \frac{x}{2}, & 0 < x < 2 \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}$$

trovare la distribuzione delle v.a.

i) $Y = 2X - 1$

ii) $Y = X^2 - Y$

Esercizio n.3:

Sia N una v.a. geometrica di parametro p. Se N assume il valore r, una seconda v.a. X_N si distribuisce come esponenziale di parametro r. Si calcoli la distribuzione di probabilità di X_N.

Esercizio n.4:

Sia (X, Y) una variabile doppia discreta con la seguente distribuzione di probabilità:

$X \backslash Y$	0	1	2
0	1/6	1/6	1/6
1	1/6	1/6	0
2	1/6	0	0

i) si calcolino le distribuzioni marginali delle due v.a. e si determini che tipo di relazioni intercorrono tra di esse.

ii) si calcoli da distribuzione di Y condizionata a $X = 0$.

SOLUZIONI:

Es. 1 $\qquad Y = e^{kX} \qquad k \in \mathbb{R}$

i) $Y \in (0, +\infty)$ q.c. per $k > 0$

$Y \in (0, 1)$ q.c per $k < 0$

$F_Y(y) = P(e^{kX} < y) = P(kX < \lg y)$

per $k > 0$ $\qquad = P\left(X < \frac{\lg y}{k}\right) = P\left(X < \lg y^{1/k}\right)$

2

$$= \begin{cases} 0 & y \le 1 \\ 1 - e^{-\lambda \log y^{1/k}} & y > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & y \le 1 \\ 1 - e^{+\log y^{-\frac{\lambda}{k}}} & y > 1 \end{cases}$$

$$= \begin{cases} 0 & y \le 1 \\ 1 - y^{-\frac{\lambda}{k}} & y > 1 \end{cases} \Rightarrow f_Y(y) = \frac{\lambda}{k} y^{-\frac{\lambda}{k}-1} \mathbb{1}_{y>1}$$

per $\underline{k<0}$ $\quad F_Y(y) \underset{\wedge}{=} \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ e^{-\lambda \log y^{1/k}} & 0 < y \le 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases} = \begin{cases} 0 & y \le 0 \\ y^{-\frac{\lambda}{k}} & 0 < y \le 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases}$

$= P\left(X > \frac{\log Y}{k}\right)$

$$\Rightarrow f_Y(y) = \underbrace{-\frac{\lambda}{k}}_{\substack{\vee \\ 0 \text{ poiché } k<0}} y^{-\frac{\lambda}{k}-1} \mathbb{1}_{y \in (0,1)}$$

ii) $\mathbb{E}(Y) \underset{\wedge}{=} \int_1^{+\infty} \cancel{y} \frac{\lambda}{k} y^{-\frac{\lambda}{k}-\cancel{1}} \, dy = +\frac{\lambda}{k} \left. \frac{y^{-\frac{\lambda}{k}+1}}{-\frac{\lambda}{k}+1} \right|_1^{+\infty} < \infty$

$\underline{\text{per } k>0}$

in $y = +\infty$ ho un valore finito solo per $-\frac{\lambda}{k} + 1 < 0$

quindi per $\boxed{k < \lambda}$. In questo caso $\mathbb{E}Y = \frac{\lambda}{-k+\lambda} > 0$

per $\underline{k<0}$ $\quad \mathbb{E}(Y) = -\int_0^1 \cancel{y} \frac{\lambda}{k} y^{-\frac{\lambda}{k}-\cancel{1}} \, dy$

$$= -\frac{\lambda}{k} \left. \frac{y^{-\frac{\lambda}{k}+1}}{1 - \frac{\lambda}{k}} \right|_0^1 = \frac{\lambda}{\underbrace{\lambda - k}_{>0}} \in (0,1)$$

in $y = 0$ ho un valore finito solo per $-\frac{\lambda}{k} + 1 \neq 0$

quindi per $\boxed{k \neq \lambda}$

Es. 2 i) $Y \in (-1,3)$ q.c.

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le -1 \\ ? & -1 < y \le 3 \\ 1 & y > 3 \end{cases}$$

per $y \in (-1,3)$ $\quad F_Y(y) = P(2X - 1 < y) =$

$$= P\left(X < \frac{y+1}{2}\right) = \left(\frac{y+1}{2}\right)^2 \cdot \frac{1}{4} = \frac{(y+1)^2}{16}$$

poiché per $x \in (0,2)$ $\quad F_X(x) = \int_0^x \frac{z}{2}\, dz = \left.\frac{z^2}{4}\right]_0^x = \frac{x^2}{4}$

$$\Rightarrow F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \le -1 \\ \frac{(y+1)^2}{16} & -1 < y \le 3 \\ 1 & y > 3 \end{cases}$$

ii) $Z = X^2 - Y = X^2 + 1 - 2X = (X-1)^2$

$Z \in (0,1)$ q.c.

$F_Z(z) = P((X-1)^2 < z) = P(-\sqrt{z} < X - 1 < \sqrt{z})$

per $z \in (0,1)$

$$= P(1 - \sqrt{z} < X < 1 + \sqrt{z})$$

$$= \frac{(1+\sqrt{z})^2}{4} - \frac{(1-\sqrt{z})^2}{4} = \frac{4\sqrt{z}}{4} = \sqrt{z}$$

$$\Rightarrow F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ \sqrt{z} & 0 < z < 1 \\ 1 & z > 1 \end{cases}$$

Ed. 3 $\quad N \sim Geom(p)$

$(X_N | N=r) \sim Exp(r)$ $\qquad X_N \in (0,+\infty)$ p.c.

$$F_{X_N}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ ? & x > 0 \end{cases}$$

$$P(X_N < x) = P(X_N < x, \Omega) = P\left(X_N < x, \bigcup_{r=1}^{\infty} (N=r)\right)$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} P(X_N < x | N=r) \, P(N=r)$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} \int_0^x r e^{-rz} dz \; p \cdot q^{r-1}$$

$$= \sum_{r=1}^{\infty} (1 - e^{-rx}) \, p q^{r-1}$$

$$= \underbrace{\sum_{r=1}^{\infty} p q^{r-1}}_{=1} - p \sum_{r=1}^{\infty} q^{r-1} e^{-rx}$$

$r-1=\ell$
$$= 1 - p \sum_{\ell=0}^{\infty} q^{\ell} e^{-\ell x - x}$$

$$= 1 - p e^{-x} \frac{1}{1 - q e^{-x}} = \frac{1 - q e^{-x} - p e^{-x}}{1 - q e^{-x}} = \frac{1 - e^{-x}}{1 - q e^{-x}}$$

$\in (0,1)$

$$\Rightarrow X_N \text{ ha } F_{X_N}(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 0 \\ \dfrac{1 - e^{-x}}{1 - q e^{-x}} & x > 0 \end{cases}$$

Es. 4

$X \backslash Y$	0	1	2	
0	1/6	1/6	1/6	1/2
1	1/6	1/6	0	1/3
2	1/6	0	0	1/6
	1/2	1/3	1/6	

i)

X	0	1	2
p_j	1/2	1/3	1/6

Y	0	1	2
p_j	1/2	1/3	1/6

ii) X e Y sono uguali in distribuzione $X \overset{d}{=} Y$

X e Y non sono indipendenti perché ad esempio

$$\frac{1}{4} = P(X=0)\,P(Y=0) \neq P(X=0, Y=0) = 1/6$$

iii) $P(Y=j \mid X=0)$

$$P(Y=0 \mid X=0) = \frac{P(Y=0, X=0)}{P(X=0)} = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3}$$

$$P(Y=1 \mid X=0) = \frac{1/6}{1/2} = \frac{1}{3} = P(Y=2 \mid X=0)$$

Quindi $(Y \mid X=0) \sim \text{Unif}\{0,1,2\}$