Esercitazione 9

Esercizio 1: Sia $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione di v.a. indipendenti avente la seguente funzione di ripartizione, per ogni n

$$F_n(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{y^n} & y > 1 \end{cases}$$

e sia X, indipendente dalle Y_n, una v.a. con f.r.

$$F_X(x) = \begin{cases} 0 & x \leq 1 \\ 1 - \frac{1}{x} & x > 1 \end{cases}.$$

Studiare la convergenza di

$$Z_n = \frac{X}{X + Y_n}$$

Suggerimento: si consiglia di studiare la convergenza di Y_n e di applicare il Teorema sulla funzione continua (sfruttando l'indipendenza delle v.a.).

Esercizio 2: Si consideri la successione di v.a. indipendenti (ma non i.d.) $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$, ciascuna con densità

$$f_{X_n}(x) = \begin{cases} \frac{n(x+1)}{2} & -\frac{1}{n} < x \leq \frac{1}{n} \\ 0 & \text{altrove} \end{cases}.$$

Determinare, se esistono,

a) il limite in distribuzione ed in probabilità della successione $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$.

b) il limite in distribuzione di $\{Y_n\}_{n=1}^{\infty}$ tale che

$$Y_n = n\left(X_n + \frac{1}{n}\right), \qquad n = 1, 2...$$

Esercizio 3: Sia $\{X_n\}_{n=1}^{\infty}$ una successione di v.a. indipendenti con $X_n \sim Unif(1, n)$. Si studi la convergenza di $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ con

$$Z_n = \frac{X_n}{n^2}, \qquad n = 1, 2...$$

Esercizio 4: Siano X_n e Y_n indipendenti per ogni n, la prima $Unif(0, n+1)$ e la seconda $Exp\left(\frac{1}{n-1}\right)$. Trovare il lim in distribuzione di $\{Z_n\}_{n=1}^{\infty}$ con

$$Z_n = \frac{Y_n}{X_n}, \qquad n = 1, 2...$$

Esercizio 5: Sia X una v.a. discreta che assume i valori -1 e 1 con uguale probabilità. Si definisca

$$X_n = \begin{cases} |X| & \text{con prob. } 1 - \frac{1}{n} \\ e^n & \text{con prob. } \frac{1}{n} \end{cases}$$

a) X_n converge a $|X|$ in distribuzione?

b) X_n converge a $|X|$ in probabilità?

c) $E(|X| - X_n)^2$ converge a 0?

Suggerimento: notare che $|X| = 1$ quasi certamente.

Esercizio 6: Siano X e Y v.a. indipendenti e i.d. con legge $Exp(1)$.

a) Calcolare valor medio e varianza di

$$Z = Y - X$$

b) Studiare la convergenza della successione

$$\frac{(Z_1 + ... + Z_n)^2}{2n}$$

dove $Z_1, ..., Z_n$ sono indipendenti e i.d. con la stessa distribuzione di Z.

c) Qual'è la distribuzione di Z?

Esercizio 7: Siano $X_1, ..., X_n$ v.a. i.i.d. e $Unif(0, 1)$. Si consideri la successione di v.a.

$$Y_n = \left(\prod_{i=1}^{n} X_i \right)^{1/n}.$$

Studiare il limite di Y_n, tenendo presente la legge dei grandi numeri.

Esercizio 8: Sia X una v.a esponenziale di parametro λ. Definiamo la successione di v.a.

$$Y_n = \begin{cases} 0 & \text{se } X \geq n \\ X & \text{altrimenti} \end{cases}.$$

i) ricavare, per ogni fissato n, la distribuzione di Y_n.
ii) studiare il limite in distribuzione.
iii) vale anche la convergenza in probabilità allo stesso limite? Motivare la risposta.

Esercizio 9: Data la successione $\{X_n\}_{n\geq 1}$ di v.a. discrete, indipendenti, che assumono valori -1 e 1 con uguale probabilità, per ogni n, sia

$$Y_n = \frac{X_1 + ... + X_n}{n^\alpha}, \qquad \alpha > 0.$$

Studiare la convergenza di $\{Y_n\}_{n\geq 1}$ per $n \to \infty$, nei due casi $\alpha = 1$ e $\alpha = 1/2$.