ESERCIZI sul MAX

(i) Sia (X, Y) una v.a. Uniforme sul triangolo T di vertici $(0,2)$, $(2,0)$ e $(0,0)$. Calcolare la distribuzione della v.a.

$$Z = \max(X, Y).$$

ii) Siano $X_1, ...X_n$ v.a. indipendenti e tutte esponenziali di parametro λ, trovare la distribuzione della v.a.

$$Y = \overset{\min}{\cancel{\max}}(X_1, ...X_n)$$

Svolgimento

(i) La v.a. $Z \in (0,2)$ q.c., poichè $X, Y \in (0,2)$ q.c. Quindi la f.r. di Z sarà

$$F_Z(z) = \begin{cases} 0, & z \leq 0 \\ ? & 0 < z \leq 2 \\ 1, & z > 2 \end{cases}.$$

Inoltre si ha

$$f_{X,Y}(x, y) = \frac{1}{\text{Area(T)}} 1_{\{0<x<1, 0<y<2-x\}} = \frac{1}{2} 1_{\{0<x<1, 0<y<2-x\}}.$$

Per $0 < z \leq 2$ si ha

$$\begin{aligned} F_Z(z) &= P(\max(X, Y) < z) \\ &= P(X < z, Y < z) \\ &= \int_{-\infty}^{z} \int_{-\infty}^{z} f_{X,Y}(x, y) dx dy. \end{aligned}$$

Tracciando il grafico del supporto T ci si rende conto di dover distinguere tra due casi diversi $z \in (0,1)$ e $z \in [1,2)$. Si vedano fig.1 e 2.

Per $z \in (0,1)$ si ha

$$F_Z(z) = \frac{1}{2} \int_0^z \int_0^z dx dy = \frac{1}{2} z^2.$$

Per $z \in (1,2)$ si deve integrare la densità congiunta sul trapezio, ma ciò coincide a sottrarre al volume complessivo, che è pari ad 1, l'integrale sui due triangolini esterni al trapezio.

$z<1$

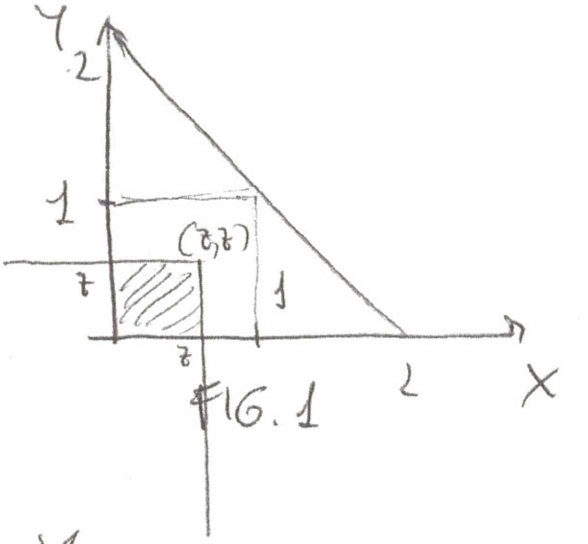

FIG. 1

$z>1$

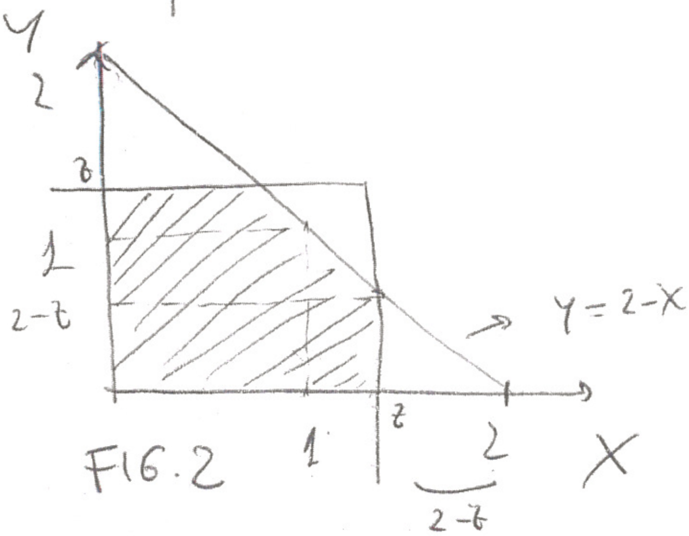

FIG. 2

$$F_Z(z) = 1 - \cancel{\frac{2}{2}} \int_z^2 dx \int_0^{2-x} dy$$

$$= 1 - \int_z^2 dx\,(2-x) =$$

$$= 1 - 2(2-z) + \left.\frac{x^2}{2}\right]_z^2$$

$$= 2z - 1 - \frac{z^2}{2}$$

oppure geometricamente

$$F_Z(z) = 1 - \cancel{2}\, \text{Area (Triangolo)} \cdot \cancel{\frac{1}{2}}$$

$$= 1 - \frac{(2-z)^2}{2} = 2z - 1 - \frac{z^2}{2}$$

$$\Longrightarrow \quad F_Z(z) = \begin{cases} 0 & z<1 \\ \frac{z^2}{2} & 0<z\leq 1 \\ 2z-1-\frac{z^2}{2} & z>1 \end{cases}$$

(ii) $Y = \min(X_1, \dots X_n) \in (0, +\infty)$ p.e.

$$F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ ? & y > 0 \end{cases}$$

$$F_Y(y) = P(\min(X_1, \dots X_n) < y)$$
$$= 1 - P(X_1 \geq y, \dots X_n \geq y)$$
$$= 1 - \left(P(X_1 \geq y)\right)^n$$
$$= 1 - (1 - F_X(y))^n$$
$$= 1 - e^{-\lambda y n}$$

$$\Rightarrow \quad Y \sim Exp(\lambda n)$$