ESERCITAZIONE

30 Ottobre 2017

Esercizio 1 (Coins n° 1). In una scatola vi sono 2 monete, una bilanciata ed una *truccata*, che ha testa su *entrambe* le facce. Scelgo a caso una moneta e la lancio n volte. Se i primi n lanci hanno dato testa, qual è la probabilità che anche l'$n+1-$mo dia testa?

Esercizio 2 (Coins n° 2). Lanciamo ripetutamente una moneta sbilanciata, con $P(T) = p$ ed effettuiamo il seguente semplice gioco:

io vinco non appena escono due teste una dopo l'altra;

tu vinci non appena escono due croci una dopo l'altra.

(a) Calcolare la probabilità che io vinca.

(b) Calcolare la probabilità che sia uscita testa al primo lancio sapendo che ho vinto.

Esercizio 3 (Urna) In un'urna vi sono $2n$ palline, n blu ed n rosse. Se ne estraggono 2 alla volta, fino alla fine delle palline. Calcolare la probabilità che ogni volta si estraggano una pallina blu ed una rossa.

Esercizio 4 (Pettegolezzi) Una comare di paese ti racconta un pettegolezzo: mente con probabilità 2/3. Chiedi conferma ad un'altra comare se ciò che hai ascoltato sia vero. Anch'ella mente con probabilità 2/3. Con che probabilità il pettegolezzo è vero sapendo che anche la seconda comare lo conferma?

Esercizio 5 (Pezzi Difettosi). In una scatola ci sono 5 componenti elettronici. Supponiamo che 2 siano difettosi. Trovare la distribuzione di probabilità del numero di tentativi necessari a individuare entrambi i pezzi difettosi nel caso in cui

(a) il controllo venga effettuato tramite un macchinario che sequenzialmente testa i pezzi fino a trovali entrambi;

(b) il controllo venga effettuato da un impiegato che si ferma non appena è in grado di individuare entrambi i pezzi difettosi

Ultima versione: 8 novembre 2017

Esercizio 1.

$M_1 =$ "estraggo moneta non truccata" $\qquad M_2 =$ "estraggo moneta truccata"

$T_j =$ "testa al $j-$mo lancio" $\qquad \bigcap_{j=1}^{k} T_j =$ "tutte teste nei primi k lanci"

. Sappiamo che

$$P(T_j|M_1) = \frac{1}{2} \qquad P(T_j|M_2) = 1$$

Gli eventi T_j sono indipendenti solo quando sappiamo quale moneta abbiamo realmente lanciato, altrimenti sapere che ho già ottenuto una testa (o più di una) modifica la mia incertezza sul fatto che otterrò nuovamente una testa: ho infatti ragione di ritenere più verosimile che stia lanciando la moneta truccata. Allora

$$\begin{aligned}
P\left(\bigcap_{j=1}^{k} T_j\right) &= P\left(\bigcap_{j=1}^{k} T_j \cap \Omega\right) \\
&= P\left(\bigcap_{j=1}^{k} T_j \cap (M_1 \cup M_2)\right) \\
&= P\left(\bigcap_{j=1}^{k} T_j \cap M_1\right) + P\left(\bigcap_{j=1}^{k} T_j \cap M_2\right) \\
&= P(M_1)P\left(\bigcap_{j=1}^{k} T_j \middle| M_1\right) + P(M_2)P\left(\bigcap_{j=1}^{k} T_j \middle| M_2\right) \\
&\text{(solo ora possiamo usare l'indipendenza e passare dall'\textit{intersezione} al \textit{prodotto})} \\
&= P(M_1)\prod_{j=1}^{k} P\left(T_j|M_1\right) + P(M_2)\prod_{j=1}^{k} P\left(T_j|M_2\right) \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2^k} + \frac{1}{2}\cdot 1 \\
&= \frac{1+2^k}{2^{k+1}}
\end{aligned}$$

La probabilità cercata è

$$\begin{aligned}
P\left(T_{n+1} \middle| \bigcap_{j=1}^{n} T_j\right) &= \frac{P\left(\bigcap_{j=1}^{n+1} T_j\right)}{P\left(\bigcap_{j=1}^{n} T_j\right)} \\
&= \frac{\frac{1+2^{n+1}}{2^{n+2}}}{\frac{1+2^n}{2^{n+1}}} \\
&= \frac{1}{2}\cdot\frac{1+2^{n+1}}{1+2^n}
\end{aligned}$$

Esercizio 2.

(a) Consideriamo gli eventi

$$V = \text{“ Vinco ”} \qquad\qquad V_n = \text{“ Vinco all'}n\text{-mo lancio”}$$

Si ha

$$V = \bigcup_{n=2}^{\infty} V_n$$

cioè posso vincere al primo lancio, oppure al secondo, al terzo e così via. Cerchiamo di capire come sono fatte le sequenze che compongono i V_m.

Affinché si verifichi l'evento V_n devono verificarsi le seguenti condizioni:

1. non possono esserci due teste di fila prima dell'n-mo lancio (altrimenti vincerei prima dell'n-mo);
2. non possono esserci due croci di fila prima dell'n-mo lancio (altrimenti vincerei prima dell'n-mo);

Di conseguenza notiamo che

3. se una sequenza inizia per testa posso vincere solo in un lancio pari

$$\begin{aligned} &TT && \rightsquigarrow V_2 \\ &TCTT && \rightsquigarrow V_4 \\ &TCTCTT && \rightsquigarrow V_6 \end{aligned}$$

4. se una sequenza inizia per croce posso vincere solo in un lancio dispari

$$\begin{aligned} &CTT && \rightsquigarrow V_3 \\ &CTCTT && \rightsquigarrow V_5 \\ &CTCTCTT && \rightsquigarrow V_7 \end{aligned}$$

Calcoliamo le probabilità di tali sequenze.

5. Una sequenza iniziante per testa in cui vinco ad un generico lancio pari, diciamo $2m$, $m \in \mathbb{N}$ è pertanto composta dalle due teste finali e da $m-1$ teste ed $m-1$ croci che si alternano nei primi $2m-2$ lanci. Questa ha probabilità

$$P(T_1 \cap V_{2m}) = p^{m-1}(1-p)^{m-1}p^2$$

6. Una sequenza iniziante per croce in cui vinco ad un generico lancio dispari, diciamo $2m+1$, $m \in \mathbb{N}$ è pertanto composta dalle due teste finali e da m croci ed $m-1$ teste che si alternano nei primi $2m-1$ lanci. Questa ha probabilità

$$P(C_1 \cap V_{2m+1}) = p^{m-1}(1-p)^{m}p^2$$

7. Invece

$$\begin{aligned} P(C_1 \cap V_{2m}) &= 0 \\ P(T_1 \cap V_{2m+1}) &= 0 \end{aligned}$$

Perciò

$$\begin{aligned} P(V) &= P\left(\bigcup_{n=2}^{\infty} V_n\right) \\ &= P\left(\bigcup_{n=2}^{\infty} V_n \cap (T_1 \cup C_1)\right) \end{aligned}$$

$$
\begin{aligned}
&= \sum_{n=2}^{\infty} [P(V_n \cap T_1) + P(V_n \cap C_1)] \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} P(V_{2m} \cap T_1) + \sum_{m=1}^{\infty} P(V_{2m+1} \cap C_1) \\
&= \sum_{m=1}^{\infty} p^{m-1}(1-p)^{m-1}p^2 \ + \ \sum_{m=1}^{\infty} p^{m-1}(1-p)^m p^2 \qquad (1) \\
&= p^2 \sum_{j=0}^{\infty} [p(1-p)]^j \ + \ p^2(1-p) \sum_{j=0}^{\infty} [p(1-p)]^j \\
&= \frac{p^2 + p^2(1-p)}{1 - p(1-p)}
\end{aligned}
$$

(b) Considerando che la prima serie della (1) corrisponde alla $P(T_1 \cap V)$ abbiamo

$$
P(T_1|V) = \frac{P(T_1 \cap V)}{P(V)} = \frac{\frac{p^2}{1-p(1-p)}}{\frac{p^2+p^2(1-p)}{1-p(1-p)}} = \frac{1}{2-p}
$$

Esercizio 3.

Definiamo gli eventi

$$
A_k = \text{“estraggo una blu ed una rossa alla } k\text{−ma estrazione”} \quad k = 1, 2, \dots, m
$$

La probabilità cercata si scrive, applicando iterativamente la legge delle probabilità composte, come

$$
\begin{aligned}
P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) = &P(A_n | A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_{n-1}) \cdot P(A_{n-1} | A_1 \cap A_2 \cdots \cap A_{n-2}) \cdots \\
&\cdot P(A_3 | A_1 \cap A_2) \cdot P(A_2 | A_1) \cdot P(A_1)
\end{aligned}
$$

Calcoliamo esplicitamente i precedenti fattori.

$$
P(A_1) = \frac{\binom{n}{1}\binom{n}{1}}{\binom{2n}{2}} = \frac{n \cdot n}{\frac{2n(2n-1)}{2}} = \frac{n}{2n-1}
$$

cioè la probabilità di estrarre esattamente una blu tra n, una rossa tra n quando estraiamo 2 palline tra $2n$

$$
P(A_2|A_1) = \frac{\binom{n-1}{1}\binom{n-1}{1}}{\binom{2n-2}{2}} = \frac{(n-1)\cdot(n-1)}{\frac{(2n-2)(2n-3)}{2}} = \frac{n-1}{2n-3}
$$

ora sappiamo di aver già tolto dall'urna una blu ed una rossa: è quindi la probabilità di estrarre esattamente una blu tra le $n-1$ rimanenti, una rossa tra le $n-1$ rimanenti quando estraiamo 2 palline tra le $2n-2$ totali rimanenti

$\dots$

$$
P\left(A_k \,\middle|\, \bigcap_{j=1}^{k-1} A_j\right) = \frac{\binom{n-(k-1)}{1}\binom{n-(k-1)}{1}}{\binom{2n-(2k-2)}{2}}
$$

$$= \frac{(n-k+1)\cdot(n-k+1)}{\frac{(2n-2k+2)(2n-2k+1)}{2}} = \frac{n-k+1}{2n-2k-1}$$

probabilità di estrarre esattamente una blu tra le $n-(k-1)$ rimanenti, una rossa tra le $n-(k-1)$ rimanenti quando estraiamo 2 palline tra le $2n-(2k-2)$ totali rimanenti

Perciò

$$\begin{aligned} P\left(\bigcap_{k=1}^{n} A_k\right) &= \prod_{k=1}^{n} \frac{n-k+1}{2(n-k)-1} \\ &[j = n-k+1] \\ &= \prod_{j=1}^{n} \frac{j}{2j-1} \\ &= \frac{1\cdot 2\cdots j\cdots n}{1\cdot 3\cdots(2j-1)\cdots(2n-1)} \cdot \underbrace{\frac{2\cdot 4\cdots(2j)\cdots 2n}{2\cdot 4\cdots(2j)\cdots 2n}}_{=2^n n!} \\ &= \frac{n!\,2^n\,n!}{(2n)!} \\ &= \frac{2^n}{\binom{2n}{n}} \end{aligned}$$

Esercizio 4.
Definiamo gli eventi

$$T = \text{“ Il pettegolezzo è vero”} \qquad S = \text{“ Il pettegolezzo viene confermato”}$$

Sapendo che la prima comare mente con probabilità 2/3 abbiamo che

$$P(T) = \frac{1}{3} \qquad P(T^c) = \frac{2}{3}$$

Se il pettegolezzo è vero e la seconda comare lo conferma allora sta dicendo la verità, il che accade con probabilità 1/3, mentre se il pettegolezzo è falso e la seconda comare lo smentisce allora sta mentendo, il che accade con probabilità 2/3. Cioè

$$P(S|T) = \frac{1}{3} \qquad P(S|T^c) = \frac{2}{3}$$

Applicando il Teorema di Bayes otteniamo

$$P(T|S) = \frac{P(S|T)\,P(T)}{P(S|T)\,P(T) + P(S|T^c)\,P(T^c)} = \frac{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3}}{\frac{1}{3}\cdot\frac{1}{3} + \frac{2}{3}\cdot\frac{2}{3}} = \frac{1}{5}$$

Esercizio 5.
(a)

$$X = \text{“tentativi necessati ad individuare pezzi difettosi con macchinario”}$$

$X \in \{2,3,4,5\}$.

$$P(X=2)=\frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{1}{10}$$

$$\begin{aligned}P(X=3)&=P(\text{“esattamente un difettoso nei primi due estratti”}\cap\text{“terzo estratto difettoso”})\\&=P(\text{“esattamente un difettoso nei primi due estratti”})\times\\&\quad\times P(\text{“terzo estratto difettoso”}|\text{“esattamente un difettoso nei primi due estratti”})\\&=\frac{\binom{2}{1}\binom{3}{1}}{\binom{5}{2}}\cdot\frac{1}{3}=\frac{1}{5}\end{aligned}$$

$$P(X=4)=\frac{\binom{2}{1}\binom{3}{2}}{\binom{5}{3}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{3}{10}$$

$$P(X=5)=\frac{\binom{2}{1}\binom{3}{2}}{\binom{5}{4}}\cdot 1=\frac{2}{5}$$

(b) L'impiegato è in grado di trarre le seguenti conclusioni

- se dopo aver estratto 3 pezzi nessuno è risultato difettoso i due rimanenti sono necessariamente quelli difettosi ed interrompe perciò il controllo
- dopo aver estratto 4 pezzi o ha trovato entrambi i pezzi difettosi o ne ha trovato uno solo (nei primi 3) e l'ultimo pezzo è necessariamente difettoso, in ogni caso può interrompere il controllo.

$Y\in\{2,3,4\}$.

$$P(Y=2)=\frac{\binom{2}{2}}{\binom{5}{2}}=\frac{1}{10}$$

$$\begin{aligned}P(Y=3)&=P(\text{“tutti difettosi nei primi 3 estratti”})+P(X=3)\\&=\frac{\binom{3}{3}}{\binom{5}{3}}+\frac{1}{5}=\frac{3}{10}\end{aligned}$$

$$\begin{aligned}P(Y=4)&=P(\text{“esatt. un difettoso nei primi 3 pezzi”}\cap\text{“quarto non difettoso“})+P(X=4)\\&=\frac{\binom{2}{1}\binom{3}{2}}{\binom{5}{3}}\cdot\frac{1}{2}=\frac{6}{10}\end{aligned}$$

Per richieste di chiarimenti e segnalazioni di misprints scrivere a `francesco.iafrate@uniroma1.it`