ESERCITAZIONE

23 Ottobre 2017

Esercizio 1 (Ritardo). Nella mia città piove un giorno su 3. Quando piove ci sarà molto traffico con probabilità 1/2, mentre se non piove ci sarà traffico con probabilità 1/4. Se piove e c'è molto traffico il tutor arriva tardi con probabilità 1/2. Se non piove e non c'è traffico la probabilità che il tutor arrivi tardi è 1/8. Negli altri casi (piove ma non c'è traffico, non piove ma c'è molto traffico) il tutor arriva in ritardo con probabilità 1/4.

(a) Quale è la probabilità che non piova, ci sia traffico e il tutor arrivi puntuale?

(b) Quale è la probabilità che il tutor arrivi tardi?

(c) Quale è la probabilità che abbia piovuto sapendo che il tutor ha tardato?

Esercizio 2 (Caffè). Sei davanti al distributore automatico del caffè con altri due amici. Il costo di un caffè è di 40 centesimi. In tasca hai 10 monete di cui

- 5 da 5 cent
- 3 da 20 cent
- 2 da 50 cent

Estrai 4 monete a caso.

(a) Qual è la probabilità che siano sufficienti a prendere il caffè per te ed ad offrirlo anche ai tuoi amici?

(b) Quale è la probabilità che siano sufficienti almeno per te?

(c) Una volta su quattro quando arrivi al distributore trovi già un credito di 5 centesimi dovuto a un resto non erogato in precedenza. Con che probabilità allora le monete estratte saranno sufficienti a prendere almeno un caffè?

Esercizio 3 (Figlie). Un padre ha n figli/e. Ciascun filgio può essere maschio o femmina con probabilità 1/2. Determinare con che probabilità siano tutte femmine nel caso in cui

(a) il padre afferma di avere almeno una figlia femmina;

(b) estraiamo uno dei figli a caso e risulta femmina.

Esercizio 4 (Esame Bayesiano). Un professore ritiene che uno studente "diligente" sia generalmente in grado di rispondere all'80% dei quesiti che gli vengono posti, mentre uno studente "non diligente" solo al 40%. Inizialmente ciascuno studente viene ritenuto diligente esattamente con probabilità 1/2. Dopo la prova scritta il docente aggiorna la propria opinione sullo studente. Questi verrà promosso se al termine dell'esame verrà ritenuto diligente con probabilità superiore all' 85%. Supponiamo che uno studente, diligente o meno, risponda correttamente a ciascuna domanda indipendentemente dalle altre.

All'esame scritto rispondi correttamente a 7 quesiti su 10. Sarà sufficiente a superare l'esame?

Ultima versione: 29 marzo 2018

Esercizio 1.
Definiamo gli eventi

$$V = \text{“piove”} \quad T = \text{“c'è traffico”} \quad R = \text{“arrivo in ritardo”}$$

Allora i dati del problema si scrivono come

$$P(V) = \frac{1}{3}$$
$$P(T|V) = \frac{1}{2} \quad P(T|V^c) = \frac{1}{4}$$
$$P(R|T \cap V) = \frac{1}{2} \quad P(R|T^c \cap V^c) = \frac{1}{8} \quad P(R|T \cap V^c) = P(R|T^c \cap V) = \frac{1}{4}$$

Consideriamo la seguente decomposizione dell'evento certo in eventi incompatibili

$$\begin{aligned}\Omega &= (T \cup T^c) \cap (V \cup V^c) \\ &= [(T \cup T^c) \cap V] \cup [(T \cup T^c) \cap V^c] \\ &= (T \cap V) \cup (T^c \cap V) \cup (T \cap V^c) \cup (T^c \cap V^c)\end{aligned}$$

Calcoliamo ora la probabilità di ciascuno di questi eventi.

$$P(T \cap V) = P(T|V)P(V) = \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{3} = \frac{1}{6}$$
$$P(T \cap V^c) = P(T|V^c)P(V^c) = \frac{1}{4} \cdot \frac{2}{3} = \frac{1}{6}$$
$$P(T^c \cap V) = P(V) - P(T \cap V) = \frac{1}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{6}$$
$$P(T^c \cap V^c) = P(V^c) - P(T \cap V^c) = \frac{2}{3} - \frac{1}{6} = \frac{1}{2}$$

Perciò otteniamo

$$\begin{aligned}P(R) &= P(R \cap \Omega) \\ &= P\{R \cap [(T \cap V) \cup (T^c \cap V) \cup (T \cap V^c) \cup (T^c \cap V^c)]\} \\ &= P(R \cap T \cap V) + P(R \cap T^c \cap V) + P(R \cap T \cap V^c) + P(R \cap T^c \cap V^c) \qquad (1) \\ &= P(R|T \cap V)P(T \cap V) + P(R|T^c \cap V)P(T^c \cap V) \\ &\quad + P(R|T \cap V^c)P(T \cap V^c) + P(R|T^c \cap V^c)P(T^c \cap V^c) \\ &= \frac{1}{2} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{4} \cdot \frac{1}{6} + \frac{1}{8} \cdot \frac{1}{2} \\ &= \frac{11}{48}\end{aligned}$$

(a)
$$P(R^c \cap T \cap V^c) = P(V^c \cap T)P(R^c|V^c \cap T) = P(V^c \cap T)[1 - P(R|V^c \cap T)] = \frac{1}{6} \cdot \frac{3}{4} = \frac{1}{8}$$

(b) $P(R) = 11/48$

(c) Come appena visto
$$P(V|R) = \frac{P(V \cap R)}{P(R)}$$

Possiamo ottenere la $P(V \cap R)$ dalla (1) considerando che

$$P(V \cap R) = P(V \cap R \cap (T \cup T^c)) = P(V \cap R \cap T) + P(V \cap R \cap T^c) = \frac{1}{12} + \frac{1}{24} = \frac{1}{8}$$

Perciò

$$P(V|R) = \frac{\frac{1}{8}}{\frac{11}{48}} = \frac{6}{11}$$

Esercizio 2.

(a) Introduciamo l'evento

$$A = (\text{“estraggo almeno 1,20 euro”})$$

L'evento si verifica solo se si estraggono le due monete da 50 cent. e due da 20 cent., oppure le due da 50 cent., una da 20 cent. ed una da 5 cent. . Perciò la probabilità è data da

$$\begin{aligned} P(E^c) &= \frac{\binom{2}{2}\binom{3}{2}}{\binom{10}{4}} + \frac{\binom{2}{2}\binom{3}{1}\binom{5}{1}}{\binom{10}{4}} \\ &= \frac{2}{35} \end{aligned}$$

(b) Introduciamo l'evento

$$B = (\text{“ estraggo almeno 40 centesimi”})$$

È più rapido calcolare la probabilità del complementare,

$$B^c = (\text{“ estraggo meno di 40 centesimi”})$$

Posso ottenere meno di 40 centesimi con le monete date solo se nei casi in cui ne estraggo 4 da 5 cent. oppure 3 da 5 cent. ed una da 20 cent. Questi due eventi sono incompatibili. Perciò

$$\begin{aligned} P(B^c) &= \frac{\binom{5}{4}}{\binom{10}{4}} + \frac{\binom{5}{3}\binom{3}{1}}{\binom{10}{4}} \\ &= \frac{1}{6} \end{aligned}$$

La probabilità cercata, $P(B)$, è quindi $5/6$.

(c) Introduciamo gli eventi

$$E = (\text{“ 5 cent. di credito nel distributore”})$$
$$C = (\text{“ acquisto almeno un caffè”})$$

Dal testo si evince che

$$P(E) = \frac{1}{4}$$

In questa situazione la probabilità dell'evento C si calcola come

$$\begin{aligned} P(C) &= P(C \cap (E \cup E^c)) \\ &= P(E)P(C|E) + P(E^c)P(C|E^c) \end{aligned} \tag{2}$$

Possiamo ovviamente supporre che l'estrazione delle monete casualmente dalla tasca sia indipendente dal fatto di trovare il resto bloccato nel distributore, e perciò le probabilità condizionate si calcolano come

$$P(C|E) = P(\text{“ acquisto almeno un caffè”}|\text{“ 5 cent. di credito nel distributore”})$$

$$
\begin{aligned}
&= P(\text{ “estraggo almeno 35 centesimi”})\\
&= 1 - P(\text{“estraggo meno di 35 centesimi”})\\
&= 1 - P(\text{“estraggo 4 monete da 5 cent.”})\\
&= 1 - \frac{\binom{5}{4}}{\binom{10}{4}}\\
&= \frac{41}{42}
\end{aligned}
$$

e

$$
\begin{aligned}
P(C|E^c) &= P(\text{“ acquisto almeno un caffè”}|\text{“ non ci sono 5 cent. di credito nel distributore”})\\
&= P(\text{ “estraggo almeno 40 centesimi”})\\
&\overset{(b)}{=} \frac{5}{6}
\end{aligned}
$$

Inserendo nella (2) si ottiene

$$P(C) = \frac{1}{4} \cdot \frac{41}{42} + \frac{3}{4} \cdot \frac{5}{6} = \frac{73}{84}$$

Esercizio 3.
Definiamo l'evento

$$F = \text{“tutte le figlie risultano femmine”}$$

Il sesso di ciascun figlio è indipendente da quello degli altri, e ciascuno può essere nato maschio o femmina con probabilità 1/2 perciò la probabilità che tutte le n figlie siano femmine è $P(F) = 1/2^n$.

(a) Consideriamo l'evento

$$A = \text{“almeno una figlia risulta femmina”}$$

Vogliamo calcolare la probabilità

$$P(F|A) = \frac{P(F \cap A)}{P(A)}$$

Ora notiamo che il fatto che tutte le figlie siano femmine implica che almeno di esse sia femmina perciò

$$F \subset A \Rightarrow P(A \cap F) = P(F) = \frac{1}{2^n}$$

Inoltre

$$P(A) = 1 - P(A^c) = 1 - P(\text{“tutti maschi”}) = 1 - \frac{1}{2^n}$$

Quindi otteniamo

$$P(F|A) = \frac{\frac{1}{2^n}}{1 - \frac{1}{2^n}} = \frac{1}{2^n - 1}$$

(b) Consideriamo l'evento

$$B = \text{“il figlio osservato risulta femmina”}$$

Un figlio è maschio o femmina con probabilità $1/2 = P(B)$.

La probabilità richiesta è

$$P(F|B) = \frac{P(F \cap B)}{P(B)}$$

Analogamente al caso precedente, se tutte le figlie sono femmine sicuramente la figlia da noi osservata risulta femmina cioè

$$F \subset B \Rightarrow P(B \cap F) = P(F) = \frac{1}{2^n}$$

Perciò

$$P(F|B) = \frac{\frac{1}{2^n}}{\frac{1}{2}} = \frac{1}{2^{n-1}}$$

Esercizio 4.
Definiamo gli eventi

$$M = \text{“studente diligente”} \qquad M^c = \text{“studente non diligente”}$$
$$A = \text{“studente risponde ad un quesito”}$$

e la v.a.

$$S = \text{“numero di quesiti, su 7, a cui lo studente risponde correttamente”}$$

Sappiamo che

$$\begin{aligned} P(A|M) &= 0.8 \\ P(A|M^c) &= 0.4 \\ P(M) &= \frac{1}{2} \end{aligned}$$

Si ha che

$$S|M \sim Binom\,(7, 0.8) \qquad S|M^c \sim Binom\,(7, 0.4)$$

Perciò

$$\begin{aligned} P(S = 7|M) &= \binom{10}{7} 0.8^7 \cdot 0.2^3 = 0.201 \\ P(S = 7|M^c) &= \binom{10}{7} 0.4^7 \cdot 0.6^3 = 0.043 \end{aligned}$$

Per il teorema di Bayes, la probabilità che uno studente sia meritevole, alla luce dell'esito dello scritto è data da

$$P(M|S = 7) = \frac{P(S = 7|M)P(M)}{P(S = 7|M)P(M) + P(S = 7|M^c)P(M^c)} = 0.826$$

che fornisce la probabilità a posteriori che lo studente sia diligente.

Per richieste di chiarimenti e segnalazioni di misprints scrivere a `francesco.iafrate@uniroma1.it`