

Esercitazione n.1 BIS (Soluzioni)

Esercizio n.1: In un gruppo di n studenti n_1 frequentano il I anno, n_2 frequentano il II anno e n_3 il III. Supponiamo di scegliere a caso due studenti e che gli studenti scelti frequentino due classi diverse.

i) Calcolare la probabilità che lo studente che frequenta la classe più avanzata sia al III anno.

ii) Calcolare la probabilità dell'evento precedente se i due studenti scelti frequentano classi successive (cioè ad un solo anno di distanza).

Suggerimento: calcolare le probabilità dei punti i) e ii) come rapporto di casi favorevoli su casi possibili.

i)

$$P(\text{"St. più avanzato al III anno"} | \text{"2 st. di classi diverse"}) = \frac{n_1 n_3 + n_2 n_3}{n_1 n_2 + n_1 n_3 + n_2 n_3}$$

ii)

$$\begin{aligned} P(\text{"St. più avanzato al III anno"} | \text{"2 st. di classi successive"}) &= \frac{n_2 n_3}{n_1 n_2 + n_2 n_3} \\ &= \frac{n_3}{n_1 + n_3} \end{aligned}$$

Esercizio n.2: In fila ad uno sportello di banca ci sono $d + u$ persone delle quali $d \geq 3$ sono donne e $u \geq 1$ sono uomini. Si calcoli la probabilità dei seguenti eventi:

i) l'ultima persona della fila sia una donna.

ii) la prima e l'ultima persona della fila siano donne.

iii) l'ultima persona della fila sia una donna, sapendo che sia la prima che la seconda sono donne.

$D :=$ "persona è donna", $U :=$ "persona è uomo"

i)

$$P(\text{"ultima } D\text{"}) = \frac{d}{d+u}$$

ii)

$$P(\text{"I } D\text{"} \cap \text{"ultima } D\text{"}) = \frac{\binom{d}{2} \binom{u}{0}}{\binom{d+u}{2}} = \frac{d(d-1)}{(d+u)(d+u-1)}$$

iii)

$$P(\text{"ultima } D\text{"} | \text{"I } D\text{"} \cap \text{"II } D\text{"}) = \frac{d-2}{d+u-2}$$

oppure, come probabilità condizionata

$$P(\text{"ultima } D\text{"} | \text{"I } D\text{"} \cap \text{"II } D\text{"}) = \frac{P(\text{"ultima } D\text{"} \cap \text{"I } D\text{"} \cap \text{"II } D\text{"})}{P(\text{"I } D\text{"} \cap \text{"II } D\text{"})}$$

Il denominatore è uguale alla probabilità calcolata al punto ii). Quindi

$$P(\text{"ultima } D" | \text{"I } D" \cap \text{"II } D") = \frac{\frac{d(d-1)(d-2)}{(d+u)(d+u-1)(d+u-2)}}{\frac{d(d-1)}{(d+u)(d+u-1)}} = \frac{d-2}{d+u-2}$$

Esercizio n.3: Tre urne U_1 , U_2 e U_3 sono inizialmente vuote. Si mettono nelle urne n palline, scegliendo, indipendentemente per ogni pallina, a caso una delle tre urne con uguali probabilità. Calcolare la probabilità che:

- i) l'urna U_1 resti vuota.
- ii) le urne U_1 e U_2 restino vuote
- iii) almeno una delle urne resti vuota.

i) $A_i := \text{"urna } i\text{-esima è vuota"}$ per $i = 1, 2, 3$

$$P(A_1) = \frac{2^n}{3^n}$$

ii)

$$P(A_1 \cap A_2) = \frac{1}{3^n}$$

ii)

$$\begin{aligned} P(A_1 \cup A_2 \cup A_3) &= 3P(A_1) - 3P(A_1 \cap A_2) + P(A_1 \cap A_2 \cap A_3) \\ &= 3\frac{2^n}{3^n} - 3\frac{1}{3^n} = \frac{2^n - 1}{3^{n-1}} \end{aligned}$$