Esercitazione 0: SOLUZIONI

1. Siano a e b due numeri reali con $a < b$ e siano $\{a_n\}$ e $\{b_n\}$ due successioni numeriche tali che $a_n \uparrow a$ e $b_n \downarrow b$. Scrivere i limiti delle seguenti successioni di insiemi:

$$\begin{array}{llll} (-\infty, a_n) & (-\infty, b_n) & (-\infty, a_n] & (-\infty, b_n] \\ (a_n, +\infty) & (b_n, +\infty) & [a_n, +\infty) & [b_n, +\infty) \\ (a_n, b) & [a_n, b) & (a_n, b] & [a_n, b] \\ (a, b_n) & [a, b_n) & (a, b_n] & [a, b_n] \end{array}$$

2. Esperimento: una moneta bilanciata viene lanciata tre volte.

   (a) Definire lo spazio Ω degli eventi;

   (b) Rappresentare i seguenti eventi come sottoinsiemi di Ω (elencare i possibili risultati contenuti in ciascun evento)

$$\begin{aligned} A &= \{\text{la prima T esce al terzo lancio}\} \\ B &= \{\text{escono 2 T e una C}\} \\ D &= \{\text{C al primo e al terzo lancio}\} \end{aligned}$$

3. Esperimento: si lancia n volte la moneta.

   (a) Definire Ω;

   (b) Rappresentare i seguenti eventi come sottoinsiemi di Ω

$$\begin{aligned} A &= \{\text{la prima T esce al terzo lancio}\} \\ B &= \{\text{escono } k \text{ T e } n-k \text{ C}\} \\ D &= \{\text{C al primo e al terzo lancio}\} \\ E &= \{\text{C al primo e all'ultimo lancio}\} \end{aligned}$$

4. Esperimento: Si lancia una moneta ripetutamente fino a quando non appare Testa. In quel momento si interrompe la prova.

   (a) CCT è uno dei possibili risultati? e TT? e CCC? Argomentare la risposta.

   (b) Scrivere l'insieme Ω di tutti i risultati possibili.

   (c) Indichiamo con E_k l'evento "l'esperimento termina al k-mo lancio". Elencare tutti gli $\omega \in \Omega$ contenuti nell'evento E_k.

   (d) Descrivere "a parole" l'evento $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ e la sua negazione.

5. Definiamo la seguente successione di inisemi:

$$A_n = \{\frac{0}{n}, \frac{1}{n}, ..., \frac{n^2}{n}\},$$

   per $n \in \mathbb{N}$.

   - E' una successione monotona?

- Trovare il *limsup* e il *liminf* per $n \to \infty$.

---

1. Ecco i limiti delle successioni considerate:

$$\begin{array}{llll} (-\infty, a_n) \uparrow (-\infty, a) & (-\infty, b_n) \downarrow (-\infty, b] & (-\infty, a_n] \uparrow (-\infty, a) & (-\infty, b_n] \downarrow (-\infty, b] \\ (a_n, +\infty) \downarrow [a, +\infty) & (b_n, +\infty) \uparrow (b, +\infty) & [a_n, +\infty) \downarrow [a, +\infty) & [b_n, +\infty) \uparrow (b, +\infty) \\ (a_n, b) \downarrow [a, b) & [a_n, b) \downarrow [a, b) & (a_n, b] \downarrow [a, b] & [a_n, b] \downarrow [a, b] \\ (a, b_n) \downarrow (a, b] & [a, b_n) \downarrow [a, b] & (a, b_n] \downarrow (a, b] & [a, b_n] \downarrow [a, b] \end{array}$$

2. Scriviamo due rappresentazioni equivalenti per Ω.

$$\begin{aligned} \Omega &= \{TTT, TTC, TCT, TCC, CTT, CTC, CCT, CCC\} \\ &= \{\omega = (x_1, x_2, x_3) \text{ tali che } x_i \in \{C, T\} \text{ per } i = 1, 2, 3\}. \end{aligned}$$

La prima è più semplice mentre la seconda può essere facilmente generalizzata al caso di n estrazioni (come vedremo nel prossimo esercizio). Comunque la si guardi, Ω contiene $2^3 = 8$ elementi (quindi $\#\Omega = 8$).

La rappresentazione degli eventi è

$$A = \{CCT\} \qquad B = \{TTC, TCT, CTT\} \qquad D = \{CCC, CTC\}.$$

Siccome la moneta è bilanciata, ogni risultato ha la stessa probabilità e quindi la probabilità di un generico evento E è

$$P(E) = \frac{\#E}{\#\Omega}$$

da cui deriva che $P(A) = \frac{1}{8}$, $P(B) = \frac{3}{8}$, $P(D) = \frac{2}{8} = \frac{1}{4}$.

3. Qui conviene usare una rappresentazione simile alla seconda usata nell'esercizio precedente

$$\Omega = \{\omega = (x_1, \cdots, x_n) \text{ tali che } x_i \in \{C, T\} \text{ per } i = 1, \cdots, n\}$$

(ogni risultato possibile ω è una n-upla di simboli, ciascuno dei quali è una C o una T) Ω contiene 2^n elementi, (quindi $\#\Omega = 2^n$).

Per quanto riguarda gli eventi

$$\begin{aligned} A &= \{\omega \in \Omega : x_1 = C, x_2 = C, x_3 = T\} \\ D &= \{\omega \in \Omega : x_1 = C, x_3 = C\} \\ E &= \{\omega \in \Omega : x_1 = C, x_n = C\}, \end{aligned}$$

si può vedere facilmente che $\#A = 2^{n-3}$, $\#B = \binom{n}{k}$, $\#D = 2^{n-2}$, $\#E = 2^{n-2}$: per quanto riguarda A, abbiamo 1 sola scelta per x_1, x_2, x_3, ma per ciascuno degli altri $n-3$ elementi abbiamo due scelte possibili, quindi complessivamente 2^{n-3}; in modo simile si ottengono le numerosità di D ed E.

Le probabilità quindi sono $P(A) = \frac{2^{n-3}}{2^n} = \frac{1}{8}$, $P(B) = \frac{\binom{n}{k}}{2^n}$, $P(D) = \frac{2^{n-2}}{2^n} = \frac{1}{4}$, $P(E) = \frac{2^{n-2}}{2^n} = \frac{1}{4}$.

4. (a) CCT è uno dei risultati possibili (appare due volte croce, poi testa per la prima volta al terzo lancio e poi mi fermo); TT no (perchè dopo la prima testa mi sarei dovuto fermare) e CCC neppure (perchè non è ancora uscita testa e quindi devo andare avanti).

   (b) L'insieme dei risultati è (attenzione al fatto – rilevante – che qui n può variare nei naturali)

$$\begin{aligned} \Omega &= \{\omega = (x_1, \cdots, x_n) \text{ tali che } x_1 = x_2 = \cdots = x_{n-1} = C, x_n = T,\ n \in \mathbb{N}\} \\ &= \left\{ \omega = (\underbrace{C, \cdots, C}_{n-1\text{volte}}, T),\ n \in \mathbb{N} \right\} \end{aligned}$$

   NOTA: Ω ha infiniti elementi e non c'è simmetria, nel senso che non hanno tutti la stessa probabilità.

   (c) L'evento E_k contiene un solo elemento (quello in cui $n = k$)

$$E_k = \left\{ (\underbrace{C, \cdots, C}_{k-1\text{volte}}, T) \right\}.$$

   (d) L'evento E_k si verifica se la prima testa appare al k-esimo lancio. L'unione $\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k$ si verifica se la prima testa appare in un lancio qualsiasi (vanno bene sia $k = 1$ che $k = 2$ che $k = 3$ e così via). Il complemento $\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} E_k\right)^c$ si verifica se la prima testa non appare in alcun lancio, quindi se esce una successione infinita di C.

5. Possiamo elencare i primi termini della successione:

$$\begin{aligned} A_1 &= \left\{\frac{0}{1}, \frac{1}{1}\right\} = \{0, 1\} \\ A_2 &= \left\{\frac{0}{2}, \frac{1}{2}, \frac{2}{2}, \frac{3}{2}, \frac{4}{2}\right\} = \left\{0, \frac{1}{2}, 1, \frac{3}{2}, 2\right\} \\ A_3 &= \left\{\frac{0}{3}, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, \frac{3}{3}, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, \frac{6}{3}, ...\frac{9}{3}\right\} = \left\{0, \frac{1}{3}, \frac{2}{3}, 1, \frac{4}{3}, \frac{5}{3}, 2, ..., 3\right\} \end{aligned}$$

   e così via.

- La successione non è monotona. Infatti $A_1 \subset A_2$ ma A_2 non è incluso in A_3

- Ogni intero positivo compreso lo zero entra a far parte di un insieme da un certo A_m in poi e non ne esce più. Ad esempio 1 entra da A_1, 2 da A_1,..., m da A_m.Quindi l'insieme dei numeri naturali compreso lo zero coincidono con il lim inf, ovvero

$$\lim\inf_{n\to\infty} A_n = \mathbb{N}$$

  Per il lim sup invece si ha che ogni razionale positivo appartiene ad infiniti degli insiemi dati: infatti, ad esempio per $\omega = 1/2$, per ogni n, esiste almeno un $m \geq n$ t.c. $\omega \in A_m$:

$$\begin{aligned} \text{per } n &= 1 \text{ sarà } m = 2 \text{ pochè per } m = 2 \geq 1,\ \text{si ha } \omega \in A_2 \\ \text{per } n &= 2 \text{ sarà } m = 2 \text{ pochè per } m = 2 \geq 2,\ \text{si ha } \omega \in A_2 \\ \text{per } n &= 3 \text{ sarà } m = 4 \text{ pochè per } m = 4 \geq 3,\ \text{si ha } \omega \in A_4 \end{aligned}$$

  e così via...quindi

$$\lim\sup_{n\to\infty} A_n = \mathbb{Q} \cap [0, +\infty)$$

  ovvero è l'insieme dei razionali positivi.