CALCOLO DELLE PROBABILITA' E STATISTICA
14/02/2020
INGEGNERIA INFORMATICA E AUTOMATICA (A-L)

Cognome :	**Nome** :	**Matricola** :

$E1$:	$+E2$:	$+E3$:	$=$	$;D1$:	$+D2$:	$+D3$:	$=$	$;VOTO =$

E1) Si ha un mazzo da quaranta carte (tipo napoletane). Vengono estratte due carte in sequenza, SENZA reinserimento.

i) • Quale é la probabilitá che la seconda carta sia un asso dato che la prima é un asso? Quale é la probabilitá che la seconda carta non sia un asso dato che la prima non é un asso?

ii) • Quale é la probabilitá che la seconda carta sia un asso? E la probabilitá che la prima carta sia un asso dato che la seconda é un asso?

Supponiamo ora che vengano pescate ~~10~~ DELLE carte a caso CON reinserimento.

iii) • Sia T il numero di estrazioni necessario ad ottenere per la prima volta un asso. Calcolare la probabilitá che sia uscito l'asso per la prima volta alla sesta estrazione. La variabile T ha distribuzione nota?

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

A_i = "carta i-esima è asso"

i) $P(A_1) = \frac{4}{40} = \frac{1}{10}$ $\quad \boxed{P(A_2|A_1) = \frac{3}{39} = \boxed{\frac{1}{13}}}$

$P(A_2^c|A_1) = \frac{12}{13}$

$P(A_1^c) = \frac{9}{10}$ $\quad P(A_2|A_1^c) = \frac{4}{39}$ $\quad \boxed{P(A_2^c|A_1^c) = \frac{35}{39}}$

ii) $\boxed{P(A_2)} = P(A_2 \cap A_1) + P(A_2 \cap A_1^c)$
$= P(A_2|A_1)\,P(A_1) + P(A_2|A_1^c)\,P(A_1^c)$
$= \frac{1}{13} \cdot \frac{1}{10} + \frac{4}{39} \cdot \frac{9}{10} = \boxed{\frac{1}{10}}$

$\boxed{P(A_1|A_2)} = \frac{P(A_2|A_1)\,P(A_1)}{P(A_2|A_1)\,P(A_1) + P(A_2|A_1^c)\,P(A_1^c)} = \frac{\frac{1}{13}\cdot\cancel{\frac{1}{10}}}{\cancel{\frac{1}{10}}} = \boxed{\frac{1}{13}}$

formula di Bayes

iii) $T \sim Geom\left(\frac{1}{10}\right)$

$$\Rightarrow \boxed{P(T=6)} = \frac{1}{10}\left(\frac{9}{10}\right)^{6-1}$$

$$= \frac{1}{10}\cdot\frac{9^5}{10^5} = \boxed{\frac{9^5}{10^6}}$$

E2)

Sia (X, Y) una v.a. doppia con la seguente densità

$$f_{X,Y}(x,y) = k \exp\left\{-\frac{(y-x)^2}{2} - xy\right\}, \qquad (x,y) \in \mathbb{R}^2,$$

per $k > 0$.

i) si calcolino le densità marginali di X e Y

ii) si calcoli il valore di k

iii) le variabili X e Y sono indipendenti?

iv) si calcoli la distribuzione di probabilità di $Z = (X+Y)^2$

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

$$f_{X,Y}(x,y) = k \exp\left\{-\frac{y^2+x^2-\cancel{2xy}+\cancel{2xy}}{2}\right\} = k e^{-\frac{x^2}{2}-\frac{y^2}{2}} \qquad x,y \in \mathbb{R}$$

i) $$f_X(x) = k\int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}} e^{-\frac{x^2}{2}}\, dy = k e^{-\frac{x^2}{2}} \frac{\sqrt{2\pi}}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy$$

$$= \sqrt{2\pi}\, k\, e^{-\frac{x^2}{2}}$$

$\frac{1}{\sqrt{2\pi}} \int_{-\infty}^{+\infty} e^{-\frac{y^2}{2}}\, dy = 1$ poiché è integrale su $\mathbb{R}$ di una $N(0,1)$

$\Rightarrow$ $\boxed{X \sim N(0,1)}$ per $\boxed{k = \frac{1}{2\pi}}$

ii) $\boxed{Y \sim N(0,1)}$

iii) le v.a. sono indipendenti poiché $f_{X,Y}(x,y) = f_X(x) f_Y(y)$ $\forall x,y \in \mathbb{R}$

iv) $Z \in (0, +\infty)$ q.c.

poiché $X \sim N(0,1)$, $Y \sim N(0,1)$ indipendenti si ha che

$W = X + Y \sim N(0,2)$

Quindi calcolo la distribuzione di $Z = W^2$

$$F_Z(z) = P(W^2 < z) =$$

$$= P(-\sqrt{z} < W < \sqrt{z}) = 2\,P(0 < W < \sqrt{z})$$

poiché W è una $N(0,2)$ quindi simmetrica intorno all'origine

$z > 0$

$$= \cancel{2}\int_0^{\sqrt{z}} \frac{e^{-\frac{w^2}{4}}}{\sqrt{\cancel{4}\pi}}\, dw$$

$$f_Z(z) = \frac{d}{dz} F_Z(z) = \frac{1}{2\sqrt{z}} \frac{e^{-\frac{z}{4}}}{\sqrt{\pi}} \mathbb{1}_{z \geq 0}$$

$$= \frac{1}{2} \frac{z^{\frac{1}{2}-1}}{\Gamma(\frac{1}{2})} e^{-\frac{z}{4}} = \left(\frac{1}{4}\right)^{1/2} \frac{z^{1/2-1}}{\Gamma(\frac{1}{2})} e^{-\frac{z}{4}}$$

$$\Longrightarrow \boxed{Z \sim \text{Gamma}(\alpha, \nu) \text{ con } \alpha = \frac{1}{4}, \ \nu = \frac{1}{2}}$$

E3) Siano X e Y v.a. indipendenti con distribuzione esponenziale di parametro 1. Sia, per $n \geq 1$,

$$Z_n = \frac{X^{1/n}}{X^{1/n} + Y^{1/n}}.$$

i) Si ricavi la funzione di ripartizione di Z_n.

ii) Si studi la convergenza in distribuzione ed in probabilità della successione $\{Z_n\}_{n\geq 1}$, per $n \to \infty$.

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

$$Z_n = \frac{1}{1+\left(\frac{Y}{X}\right)^{\frac{1}{n}}} \in (0,1) \text{ q.c.} \qquad F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 0 & z \leq 0 \\ ? & 0 < z \leq 1 \\ 1 & z > 1 \end{cases}$$

per $0 < z \leq 1$

$$F_{Z_n}(z) = P(Z_n < z)$$

$$= P\left(\frac{1}{1+\left(\frac{Y}{X}\right)^{1/n}} < z\right) = P\left(1+\left(\frac{Y}{X}\right)^{\frac{1}{n}} > \frac{1}{z}\right)$$

$$= P\left(\frac{Y}{X} > \left(\frac{1}{z}-1\right)^n\right)$$

$$= P\left(Y > \underbrace{\left(\frac{1}{z}-1\right)^n}_{\geq 0} X\right)$$

poiché $0 < z \leq 1 \Rightarrow \frac{1}{z} \geq 1$

$$= \int_0^{+\infty} dx \int_{\left(\frac{1}{z}-1\right)^n x}^{+\infty} e^{-x-y}\, dy$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-x}\left[-e^{-y}\right]_{\left(\frac{1}{z}-1\right)^n x}^{+\infty} dx$$

$$= \int_0^{+\infty} e^{-x-x\left(\frac{1}{z}-1\right)^n} dx$$

$$= \left[-\frac{e^{-x\left[1+\left(\frac{1}{z}-1\right)^n\right]}}{1+\left(\frac{1}{z}-1\right)^n}\right]_0^{+\infty} = \frac{1}{1+\left(\frac{1}{z}-1\right)^n}$$

$$\Rightarrow \boxed{F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ \dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{z}-1\right)^n} & 0 < z \le 1 \\ 1 & z > 1 \end{cases}}$$

[verifica: per $z=0$ $\quad 0 = F_Z(0) = F_Z(0^+) = \dfrac{1}{1+\left(\frac{1}{0}-1\right)^n} = 0$

per $z=1$ $\quad 1 = F_Z(1) = F_Z(1^+) = 1$]

ii) $$\lim_{n\to\infty} F_{Z_n}(z) = \begin{cases} 0 & z \le 0 \\ 0 & 0 < z \le \frac{1}{2} \quad \left(\text{poiché } \frac{1}{z}-1 \ge 1\right) \\ 1 & \frac{1}{2} < z \le 1 \quad \left(\text{poiché } \frac{1}{z}-1 < 1\right) \\ 1 & z > 1 \end{cases}$$

$$\Rightarrow \quad F_{Z_n}(z) \xrightarrow{n\to\infty} \begin{cases} 0 & z \le \frac{1}{2} \\ 1 & z > \frac{1}{2} \end{cases}$$

$$\boxed{Z_n \overset{d}{\Longrightarrow} Z \overset{q.c.}{=} \frac{1}{2}}$$

Per il teorema che afferma che nel caso di v.a. limite degenere la conv. i.d. implica la conv. in prob.

$$\boxed{Z_n \xrightarrow{P} Z \overset{q.c.}{=} \frac{1}{2}}$$

D1) Enunciare la definizione di numero di combinazioni semplici $C_{n,k}$ di k elementi in un gruppo di n, di numero di disposizioni semplici $D_{n,k}$ di k elementi in un gruppo di n, e di numero di permutazioni semplici P_n di n elementi.

- Fissati n e $k < n$, quale dei due numeri tra $D_{n,k}$ e P_n é il maggiore? Dimostrare brevemente la risposta.

- Definire la densità di probabilitá di una v.a. continua ed elencarne le proprietá.

- Dimostrare che se $X \sim N(0,1)$ allora X^2 si distribuisce come una Chi-quadro con 1 grado di libertà .

N.B. Fornire tutti i dettagli delle dimostrazioni

D2)

- Enunciare la definizione di probabilitá condizionata di un evento D dato un evento F. Cosa succede se i due eventi sono disgiunti? E se sono indipendenti?
- Dare la definizione di legge della probabilitá totale di un evento E su una partizione data da due eventi F e F^C.
- Enunciare e dimostrare la formula di Bayes per l'evento F dato l'evento D, dove F e F^C sono una partizione dello spazio degli eventi.

N.B. Fornire tutti i dettagli delle dimostrazioni

D3) Data una successione di v.a $\{(X_n, Y_n)\}_{n\geq 1}$

i) dare la definizione della convergenza $(X_n, Y_n) \xrightarrow{d} (X, Y)$

ii) dimostrare la relazione esistente tra la convergenza al punto i) e quella delle componenti

iii) in quale caso le due forme di convergenza sono equivalenti (ovvero si implicano a vicenda)? Dimostrarne il motivo.

N.B. Fornire tutti i dettagli delle dimostrazioni.