CALCOLO DELLE PROBABILITA' E STATISTICA
21/01/2020
INGEGNERIA INFORMATICA E AUTOMATICA (A-L)

Cognome :	**Nome** :	**Matricola** :

$E1$:	$+E2$:	$+E3$:	=	; $D1$:	$+D2$:	$+D3$:	=	; $VOTO$ =

E1) Un aereo ha due motori (m_1 e m_2) che si possono rompere, indipendentemente uno dall'altro: m_1 si rompe con probabilità 4%, mentre m_2 si rompe con probabilità 6%. Se entrambi i motori si rompono, l'aereo cade. Calcolare la probabilità che
i) l'aereo cada
ii) almeno uno dei due motori si rompa
iii) si rompa m_1, sapendo che almeno uno dei due si rompe
iv) l'aereo non cada, sapendo che si ha almeno un motore rotto

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

$M_i =$ "si rompe m_i" $\quad i = 1,2$

i) $P(\text{aereo cade}) = P(M_1 \cap M_2) = 0{,}04 \cdot 0{,}06 = 0{,}0024$

ii) $P(M_1 \cup M_2) = P(M_1) + P(M_2) - P(M_1 \cap M_2) = 0{,}04 + 0{,}06 - 0{,}002$
$= 0{,}0976$

iii) $P(M_1 \mid M_1 \cup M_2) = \dfrac{\overbrace{P(M_1 \cup M_2 \mid M_1)}^{=1} \cdot P(M_1)}{P(M_1 \cup M_2)} = \dfrac{0{,}04}{0{,}0976} = 0{,}409$

iv) $P(\overbrace{(M_1 \cap M_2^c) \cup (M_1^c \cap M_2)}^{\text{"uno solo si rompe"}} \mid M_1 \cup M_2)$

$= \dfrac{\overbrace{P(M_1 \cup M_2 \mid \text{uno solo si rompe})}^{=1} P(\text{uno solo si rompe})}{P(M_1 \cup M_2)}$

eventi incompatibili

$= \dfrac{P((M_1 \cap M_2)^c \cup (M_1^c \cap M_2))}{P(M_1 \cup M_2)}$

$= \dfrac{P(M_1) \cdot P(M_2^c) + P(M_2) P(M_1^c)}{0{,}0976} = \dfrac{0{,}04 \cdot 0{,}94 + 0{,}96 \cdot 0{,}06}{0{,}0976} =$

E2) Sia X una v.a. assolutamente continua con funzione di ripartizione, per $k > 0$,

$$F_X(x) = \begin{cases} 0, & x \leq 0 \\ k - e^{-x} - xe^{-x}, & x > 0 \end{cases}$$

i) si calcoli la costante k (applicando le proprietà di tale f.r.)
ii) si calcoli la funzione di densità della v.a. $Y = e^{-X}$

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

i) per $x \to 0^+$ $\quad F_X(0) = 0 = \lim_{x \to 0^+} F_X(x) = k - 1 \Rightarrow \boxed{k=1}$

poiché la v.a. è ass. continua

[oppure per $x \to +\infty$ $\quad 1 = \lim_{x \to +\infty} F_X(x) = k$]

ii) $Y = e^{-X}$ $\quad Y \in (0,1)$ q.c.

$$F_Y(y) = P(e^{-X} < y) = P(-X < \log y)$$
$$= P(X > -\log y)$$
$$= \cancel{1} - \cancel{1} + e^{+\log y} - \log y \, e^{\log y}$$
$$= y + y \log y$$

poiché $k=1$

$$\Rightarrow F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ y(1 - \log y) & 0 < y \leq 1 \\ 1 & y > 1 \end{cases}$$

$$\boxed{f_Y(y)} = \frac{d}{dy} F_Y(y) = \cancel{1} - \log y - \frac{\cancel{y}}{y} 1_{y \in (0,1)} = \boxed{-\log y \, 1_{y \in (0,1)}}$$

[Nota: $-\log y > 0$ poiché $y \in (0,1)$]

E3) Sia X_n una v.a. esponenziale di parametro λ_n, per ogni n fissato, e sia $Y_n = X_n^n - 1$.
i) Si calcoli la distribuzione di Y_n
ii) Si studi la convergenza della successione $\{Y_n\}_{n\geq 1}$, per $n \to +\infty$, nei due casi $\lambda_n = n$ e $\lambda_n = 1/n$

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

i) $Y_n \in (-1, +\infty)$ q.c.

per $y > -1$

$$F_{Y_n}(y) = P(X_n^n - 1 < y) = P(X_n^n < y+1)$$

$$= P\left(X_n < (1+y)^{\frac{1}{n}}\right) = 1 - e^{-\lambda_n (1+y)^{1/n}}$$

$$\Rightarrow \boxed{F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & y \leq -1 \\ 1 - e^{-\lambda_n (1+y)^{1/n}} & y > -1 \end{cases}}$$

Verifica: è continua in -1 perché $F_{Y_n}(-1^+) = 1 - e^{-\lambda_n \cdot 0} = 0 = F_{Y_n}(1)$

e per $y \to +\infty$ $\lim_{y \to +\infty} F_{Y_n}(y) = 1 - e^{-\infty} = 1$

ii) per $\underline{\lambda_n = \frac{1}{n}}$

$$\lim_{n \to +\infty} F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & y \leq -1 \\ \lim_{n \to +\infty} \left[1 - e^{-\frac{1}{n}(1+y)^{1/n}}\right] = 0 & y > -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $\boxed{\text{non converge}}$ perché la f.r. di Y_n tende a 0 per ogni y

per $\underline{\lambda_n = n}$

$$\lim_{n \to +\infty} F_{Y_n}(y) = \begin{cases} 0 & y \leq -1 \\ \lim_{n \to +\infty} \left[1 - e^{-n(1+y)^{1/n}}\right] = 1 & y > -1 \end{cases}$$

$\Rightarrow$ $Y_n \xrightarrow{d} Y \overset{q.c.}{=} -1$ e converge anche i.p. a -1

D1) Siano A_k, $1 \leq k \leq n$ eventi compatibili.

- Dimostrare che $P(\cup_{k=1}^n A_k) \leq \sum_{k=1}^n P(A_k)$.
- Dimostrare come corollario che $P(\cap_{k=1}^n A_k) \geq 1 - \sum_{k=1}^n P(A_k^c)$
- Dare la definizione di probabilitá condizionata e dimostrare che $P(A \cup B|C) = P(A|C) + P(B|C) - P(A \cup B|C)$
- Dimostrare che se A e B sono due eventi indipendenti allora A^c e B^c sono indipendenti.

N.B. Fornire tutti i dettagli delle dimostrazioni

D2)

.

- Dare la definizione di variabile aleatoria (v.a.) su uno spazio di probabilitá e della sua legge.
- Dare la definizione di v.a. discreta e assolutamente continua
- Definire la distribuzione di probabilitá di una v.a. discreta ed elencarne le proprietá.
- Sia X una v.a. assolutamente continua con densitá f e siano $a, b \in \mathbb{R}$, $a \neq 0$. Calcolare la densitá della variabile aleatoria $Y = aX + b$. (Suggerimento: separare il caso $a > 0$ e $a < 0$).

N.B. Fornire tutti i dettagli delle dimostrazioni

D3) Data una successione $\{X_n\}_{n\geq 0}$

- fornire la definizione della convergenza $X_n \xrightarrow{p} X$
- indicare sotto quali le ipotesi si ha che

$$\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow{p} K$$

  e indicare di quale costante K si tratta
- fornire una dimostrazione completa del risultato precedente.

N.B. Fornire tutti i dettagli delle dimostrazioni.