CALCOLO DELLE PROBABILITA' E STATISTICA
7-11-2019
INGEGNERIA INFORMATICA E AUTOMATICA (A-L)

Cognome :	Nome :	Matricola :

$E1$:	$+E2$:	$+D1$:	$+D2$:	=

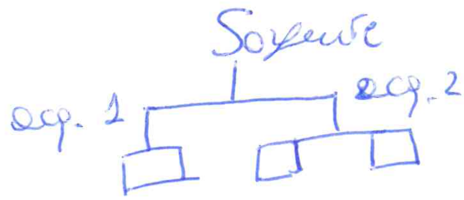
E1)

Una sorgente alimenta due acquedotti ed è in secca con probabilità p. Ai due acquedotti sono allacciate una casa, al primo, e due case, al secondo. Inoltre i due acquedotti, indipendentemente tra loro e dalla condizione della sorgente, possono guastarsi con probabilità p.

1. Calcolare la distribuzione di probabilità della v.a. X ="numero di case a cui arriva l'acqua"
2. Calcolare per quali valori di p il numero medio di case a cui arriva l'acqua è maggiore di 2

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

S = "sorgente eroga acqua" A_i = "acquedotto i-esimo funziona"



$$P(S) = q = 1-p = P(A_i) \quad i=1,2$$

1) $P(X=j) \quad j=0,1,2,3$

$$= P(X=j \cap S) + P(X=j \cap S^c)$$

$$= P(X=j \mid S)P(S) + P(X=j \mid S^c)P(S^c)$$

per $j=0$

$$P(X=0) = P(X=0 \mid S)P(S) + \underbrace{P(X=0 \mid S^c)}_{1}P(S^c)$$

$$= p^2 q + p$$

per $j=1$

$$P(X=1) = P(X=1 \mid S)P(S) + \cancel{P(X=1 \mid S^c)P(S^c)}$$

$$= q^2 p + 0 = q^2 p$$

per $j=2$

$$P(X=2) = P(X=2 \mid S)P(S) = P(X=1) = pq^2$$

per $j=3$ $\quad P(X=3) = P(X=3|S)P(S)$

$$= q^3$$

Verifica: $p^2q + p + 2q^2p + q^3$

$$= p^2(1-p) + p + 2p(1-p)^2 + (1-p)^3$$

$$= \cancel{p^2} - \cancel{p^3} + \cancel{p} + \cancel{2p} + \cancel{2p^3} - \cancel{4p^2} + 1 - p^3 - \cancel{3p} + \cancel{3p^2}$$

$$= 1$$

2)

$$\mathbb{E}X = 1 \cdot q^2 p + 2q^2 p + 3q^3$$

$$= 3(1-p)^2 p + 3(1-p)^3 = 3(p + p^3 - 2p^2) + 3(1 - p^3 - 3p + 3p^2)$$

$$= 3p + \cancel{3p^3} - 6p^2 + 3 - \cancel{3p^3} - 9p + 9p^2 = 3 - 6p + 3p^2$$

$$= 3(1-p)^2.$$

$$\mathbb{E}X = 3(1-p)^2 > 2 \implies (1-p)^2 > \frac{2}{3}$$

$$1-p > \frac{\sqrt{2}}{\sqrt{3}}$$

$$\boxed{p < 1 - \sqrt{\frac{2}{3}}}$$

E2)

La v.a. X ha funzione di densità

$$f_X(x) = \begin{cases} kx, & 0 < x < 1 \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

Siano inoltre $X_1, ..., X_n$ v.a. indipendenti e tutte distribuite come la X.

1. si calcoli la costante k
2. Si studi la convergenza della successione $\{Y_n\}_{n\geq 1}$, per $n \to +\infty$, dove
$$Y_n = (X_1 \cdots X_n)^{1/n}$$
3. Si studi la convergenza di $\mathbb{E}Y_n$, per $n \to +\infty$.

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

i) $k \int_0^1 x \, dx = k \frac{x^2}{2} \Big]_0^1 = \frac{k}{2} = 1 \Rightarrow \boxed{k = 2}$

ii) $Y_n \in (0,1)$ q.c.

Considero $\log Y_n = \frac{1}{n} \log (X_1 \cdots X_n)$
$$= \frac{1}{n} \sum_{i=1}^{n} \underbrace{\log X_i}_{\text{sono i.i.d. poiché lo sono le } X_i}$$

Quindi posso applicare la LDGN se $E \log X_i < \infty$ e $Var(\log X_i) < \infty$

Calcolo la distribuzione di $W_i = \log X_i = g(X) \in (-\infty, 0)$ mediante la formula del Teorema (poiché X è ass. continua e il log è invertibile)

$$f_W(w) = f_X(g^{-1}(w)) \frac{d}{dw} e^w$$
$$= f_X(e^w) e^w = 2 e^{2w} \mathbb{1}_{(-\infty,0)}(w)$$

$$\mathbb{E}W = 2\int_{-\infty}^{0} e^{2w}\, w\, dw \qquad 2w = -x, \quad w = -\frac{x}{2}$$

$$= \frac{\cancel{2}}{\cancel{2}}\int_{0}^{+\infty} e^{-x}(-x)\, dx = -\frac{1}{2} < \infty$$

$$\mathbb{E}W^2 = 2\int_{-\infty}^{0} e^{2w} w^2\, dw = \frac{2}{2^3}\int_{0}^{+\infty} x^2 e^{-x}\, dx$$

$$= \frac{\Gamma(3)}{4} = \frac{2!}{4} = \frac{1}{2} < \infty$$

$$\mathrm{Var}(W) = \mathbb{E}(W^2) - (\mathbb{E}W)^2 = \frac{1}{2} - \left(-\frac{1}{2}\right)^2 = \frac{1}{4} < \infty$$

Quindi per la LDGN

$$\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} W_i = \frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} \log X_i \xrightarrow{P} \mathbb{E}W_i = -\frac{1}{2}$$

Applicando il Teorema delle convergenze "sotto funzione continua"

$$Y_n = \exp\left\{\frac{1}{n}\sum_{i=1}^{n} W_i\right\} \xrightarrow{P} \exp\left\{-\frac{1}{2}\right\}$$

→ v.c. degenere

ii)

Quindi $\mathbb{E}Y_n \xrightarrow[n\to+\infty]{} e^{-\frac{1}{2}}$

D1) Date due v.a. X e Y,

- si definisca il $\mathbb{E}(X+Y)$ e se ne ricavi la relazione con il valore atteso delle singole variabili (almeno in uno dei due casi, discreto o continuo)
- si definisca il $\mathbb{E}(XY)$ e si mostri che, sotto opportune condizioni, esso equivale al prodotto dei valori attesi delle singole variabili
- si ricavi la formula per la varianza di $X+Y$, con dim.

N.B. Fornire tutti i dettagli delle dimostrazioni

D2)

- Si definisca la convergenza in distribuzione per una successione di v.a. unidimensionali $\{X_n\}_{n\geq 1}$, per $n \to +\infty$
- Si definisca la convergenza in distribuzione di una successione di v.a. k-dimensionali $\left\{X_n^{(1)}, ..., X_n^{(k)}\right\}_{n\geq 1}$, per $n \to +\infty$
- Si dimostri la relazione tra la convergenza in distribuzione di $\left\{X_n^{(1)}, ..., X_n^{(k)}\right\}_{n\geq 1}$ e quella delle sue componenti

N.B. Fornire tutti i dettagli delle dimostrazioni.