CALCOLO DELLE PROBABILITA' E STATISTICA
5/09/2019
INGEGNERIA INFORMATICA E AUTOMATICA (A-L)

Cognome :	Nome :	Matricola :

$E1$:	$+E2$:	$+E3$:	=	; $D1$:	$+D2$:	$+D3$:	=	; $VOTO$ =

E1) Due mazzi di carte francesi hanno entrambi 12 carte; nel mazzo A ci sono 4A (assi), 4K (re), 4Q (donne), il mazzo B è stato truccato e contiene 8A (assi), 2K (re), 2Q (donne). Un giocatore riceve 5 carte (estratte senza ripetizione *dallo stesso mazzo scelto a caso, preventivamente, tra i due*) e trova che ci sono 3 A, 1K, 1Q.

(i) qual'è la probabilità che provengano dal mazzo B?

(ii) se il giocatore sceglie di cambiare due carte, conservando i 3A e pescando dallo stesso mazzo di prima, qual'è la probabilità che avrà poker d'assi (4A) dopo il cambio?

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

$E =$ "3A, 1K, 1Q"

i) per la formula di Bayes

$$P(B|E) = \frac{P(E|B)P(B)}{P(E|A)P(A) + P(E|B)P(B)}$$

$$P(E|B) = \frac{\binom{8}{3}\binom{2}{1}\binom{2}{1}}{\binom{12}{5}} = \frac{\frac{\cancel{8\cdot 7\cdot 6}}{\cancel{3\cdot 2}}\cdot \cancel{4}}{\frac{\cancel{12\cdot 11\cdot 10\cdot 9\cdot 8}}{\cancel{5\cdot 4\cdot 3\cdot 2}}} = \frac{28}{99}$$

$$P(E|A) = \frac{\binom{4}{3}\binom{4}{1}\binom{4}{1}}{\binom{12}{5}} = \frac{4^3}{99\cdot 8} = \frac{8}{99}$$

$$\Rightarrow P(B|E) = \frac{\cancel{\frac{1}{2}}\cdot\frac{28}{\cancel{99}}}{\cancel{\frac{1}{2}}\cdot\frac{8}{\cancel{99}} + \cancel{\frac{1}{2}}\cdot\frac{28}{\cancel{99}}} = \frac{28}{36} = \frac{7}{9}$$

$$P(A|E) = \frac{2}{9}$$

ii) $P(\text{poker assi}) = P(\text{poker}|A)P(A) + P(\text{poker}|B)P(B)$

Scanned by CamScanner

Ora, poiché non cambia il metodo, al posto di $P(A)$ devo mettere $P(A|E)$ e, al posto di $P(B)$, $P(B|E)$

$$\Rightarrow \frac{2}{9}\,\frac{1\binom{8}{1}}{\binom{9}{2}} + \frac{7}{9}\cdot\frac{\binom{5}{1}\binom{4}{1}}{\binom{9}{2}} = \frac{4}{81} + \frac{35}{81} = \frac{39}{81}$$

↑ se si intende che abbia solo 4A

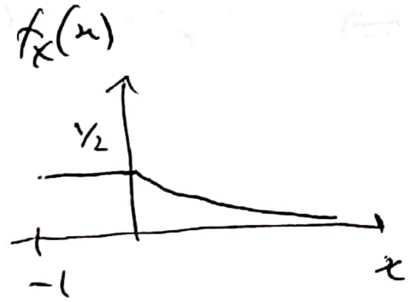
Se invece si fosse inteso che ha o 4A oppure 5A

$$= \frac{4}{81} + \frac{7}{9}\cdot\frac{\binom{5}{1}\binom{4}{1}+\binom{5}{2}}{\binom{9}{2}} = \frac{113}{162}$$

Scanned by CamScanner

E2) Sia X una v.a. con funzione di densità, per $k > 0$,

$$f_X(x) = \begin{cases} k, & x \in (-1, 0) \\ ke^{-x}, & x \in (0, +\infty) \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$



(i) Determinare la costante k

(ii) Calcolare la distribuzione di $Y = X^2$

(iii) Calcolare $\mathbb{E}Y$

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

i) $$k \int_{-1}^{0} dx + k \int_{0}^{+\infty} e^{-x}\, dx = k + k \left[-e^{-x}\right]_0^{+\infty} = 2k = 1$$

$$\Longrightarrow \boxed{k = \frac{1}{2}}$$

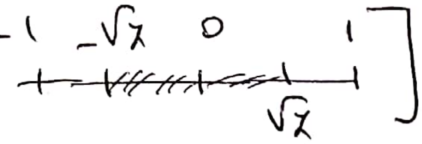
ii) $Y = X^2 \in (0, +\infty)$ q.c.

per $y > 0$

$$P(Y < y) = P(X^2 < y) = P(-y < X < y)$$

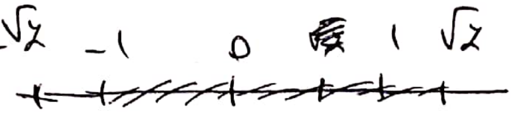
$$= P(-\sqrt{y} < X < 0) + P(0 < X < \sqrt{y})$$

Distinguo due casi (I) [per $0 < y < 1$



$$= \int_{-\sqrt{y}}^{0} \frac{1}{2}\, dx + \frac{1}{2} \int_{0}^{\sqrt{y}} e^{-x}\, dx$$

$$= \frac{\sqrt{y}}{2} + \frac{1}{2}\left[-e^{-x}\right]_0^{\sqrt{y}} = \frac{\sqrt{y}}{2} + \frac{1}{2} - \frac{e^{-\sqrt{y}}}{2} = \frac{1}{2}(1 + \sqrt{y}) - \frac{e^{-\sqrt{y}}}{2}$$



(II) [per $y > 1$

$$= \int_{-1}^{0} \frac{1}{2}\, dx + \frac{1}{2} \int_{0}^{\sqrt{y}} e^{-x}\, dx$$

Scanned by CamScanner

$$= \frac{1}{2} + \frac{1}{2}\left(1 - e^{-\sqrt{y}}\right) = 1 - \frac{1}{2} e^{-\sqrt{y}}$$

$$\Rightarrow \boxed{F_Y(y) = \begin{cases} 0 & y \leq 0 \\ \frac{1}{2}(1+\sqrt{y}) - \frac{e^{-\sqrt{y}}}{2} & 0 < y \leq 1 \\ 1 - \frac{e^{-\sqrt{y}}}{2} & y > 1 \end{cases}}$$

iii) $\mathbb{E}Y = \mathbb{E}(X^2) = \int_{-1}^{0} \frac{x^2}{2} dx + \frac{1}{2} \int_0^{+\infty} x^2 e^{-x} dx$

$$= \frac{1}{2}\left[\frac{x^3}{3}\right]_{-1}^{0} + \frac{1}{2} \underbrace{\Gamma(3)}_{=2}$$

$$= + \frac{1}{6} + 1 = \frac{7}{6}$$

Scanned by CamScanner

E3) Sia X una v.a. Gamma di parametri α e β, ovvero con densità

$$f_X(x) = \begin{cases} Kx^{\alpha-1}e^{-\beta x}, & x \in (0,+\infty) \\ 0, & \text{altrove} \end{cases}$$

per $K > 0$ e siano $X_1, .., X_n$ v.a. indipendenti ed identicamente distribuite (come la X).

- Ricavare la costante K, riportando i dettagli dei calcoli
- Studiare la convergenza della successione

$$Z_n = \frac{1}{n^2}\left(\sum_{i=1}^{n} X_i\right)^2,$$

per $n \to +\infty$.

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

i) $$K\int_0^{+\infty} x^{\alpha-1} e^{-\beta x}\, dx \underset{\uparrow}{=} \frac{K}{\beta}\int_0^{+\infty} \left(\frac{z}{\beta}\right)^{\alpha-1} e^{-z}\, dz$$

$\beta x = z \qquad x = \frac{z}{\beta} \qquad dx = \frac{dz}{\beta}$

$$= \frac{K}{\beta^\alpha}\Gamma(\alpha) = 1 \quad \Rightarrow \quad K = \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)}$$

ii) $$Z_n = \left(\frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n}\right)^2$$

Poiché le v.a. X_i sono i.i.d e con

$$\mathbb{E}X = \int_0^{+\infty} \frac{\beta^\alpha}{\Gamma(\alpha)} \cdot \cancel{x} \cdot x^{\cancel{\alpha-1}} e^{-\beta x}\, dx$$

$$= \frac{\Gamma(\alpha+1)}{\Gamma(\alpha)} \cdot \frac{\cancel{\beta^\alpha}}{\beta^{\cancel{\alpha}+1}} = \frac{\alpha}{\beta}$$

e $V(X) < \infty$ essendo una v.a. Gamma

Scanned by CamScanner

per la LGN $\quad Y_n = \sqrt{Z_n} = \frac{\sum_{i=1}^{n} X_i}{n} \xrightarrow{P} \mathbb{E}(X)$

per il teorema della convergenza in prob. sotto funzione continua

$$\Rightarrow \quad \boxed{Z_n} = Y_n^2 \boxed{\xrightarrow{P}} (\mathbb{E}X)^2 = \boxed{\frac{\alpha^2}{\beta^2}}$$

Scanned by CamScanner

D1)

- Dimostrare che se A_n, $n \geq 1$, è una successione di eventi monotona decrescente, allora $lim_{n\to+\infty}P(A_n) = P(\lim_{n\to+\infty} A_n)$.
- Utilizzando il punto precedente, dimostrare che la tesi resta vera per una successione monotona crescente.
- Dimostrare che se $A_n, n \geq 1$, è una successione di eventi convergente (ma non necessariamente monotona), allora $lim_{n\to+\infty}P(A_n) = P(\lim_{n\to+\infty} A_n)$.
- Descrivere la relazione tra continuità della probabilità e additività completa (con dim. delle implicazioni).

N.B. Fornire tutti i dettagli delle dimostrazioni

Scanned by CamScanner

D2)

- Definizione di v.a. assolutamente continua e di funzione di densità
- Proprietà della funzione di densità (con dim.) e relazione con la funzione di ripartizione
- Teorema (con dim.) su funzioni (invertibili) g di v.a. assolutamente continue (per ricavare la densità di $Y = g(X)$ a partire dalla densità $f_X(\cdot)$)

N.B. Fornire tutti i dettagli delle dimostrazioni

Scanned by CamScanner

D3)

- Definire la convergenza in distribuzione di successione di v.a. unidimensionali
- Definire la conv. in distribuzione di succ. di v.a. multiple e dimostrare la relazione con la convergenza in distribuzione delle componenti.
- Enunciare il teorema limite centrale (senza dim.) e ricavare il conseguente intervallo di confidenza per la media campionaria.

N.B. Fornire tutti i dettagli delle dimostrazioni.

Scanned by CamScanner