CALCOLO DELLE PROBABILITA' E STATISTICA
19/07/2019
INGEGNERIA INFORMATICA E AUTOMATICA (A-L)
compito A

Cognome :	**Nome** :	**Matricola** :

$E1:$	$+E2:$	$+E3:$	$=$	$;D1:$	$+D2:$	$+D3:$	$=$	$;VOTO=$

E1) Un'urna contiene 3 palline viola e 5 palline bianche. Vengono effettuate 3 estrazioni.

(i) Supponiamo che le estrazioni vengano fatte SENZA reinserimento. Calcolare la probabilità di ottenere palline tutte viola oppure palline tutte bianche.

(ii) Supponiamo che le estrazioni vengano fatte SENZA reinserimento. Calcolare la probabilità di estrarre almeno 1 palline viola e 1 bianca.

(iii) Calcolare la probabilità al punto (i) nel caso in cui le estrazioni vengano fatte CON reinserimento.

(iv) Supponiamo che ora le palline vengano estratte a caso CON reinserimento. Sia T_1 il numero di estrazioni necessario ad ottenere per la prima volta una pallina bianca e T_2 il numero di estrazioni necessario ad ottenere per la seconda volta una pallina bianca. Calcolare $P(T_1 \leq 3)$ e $P(T_2 \in (1,5))$. Le variabili T_1 e T_2 hanno distribuzioni note?

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

E2) Un certo programma per computer può utilizzare una delle procedure A o B, a seconda del problema da trattare; l'esperienza ha mostrato che la procedura A viene usata il 40% delle volte e la B il 60% delle volte. Se si usa la procedura A, c'è una probabilità del 75% che il programma venga eseguito correttamente entro il suo tempo limite; se si usa la procedura B, c'è una probabilità del 50% che questo accada.

(i) Qual'è la probabilità che il programma venga eseguito entro il tempo limite?

(ii) Sapendo che il programma è stato eseguito nel tempo limite, qual'è la probabilità che sia stata utilizzata la procedura A?

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

E3) Sia (X, Y) una v.a. uniforme sul quadrato $(0,1)\times(0,1)$. Calcolare

- la probabilità che Y sia minore di X^n.
- la convergenza della successione X^n per $n \to +\infty$ (specificando di quale forma di convergenza si tratta)
- la convergenza della successione, per $n \to +\infty$,

$$Z_n = \frac{\sum_{j=1}^{n} X_j^k - \frac{n}{k+1}}{\sqrt{n}}, \qquad k \in \mathbb{N},$$

dove X_j sono v.a. indipendenti ed identicamente distribuite come X, per ogni $j = 1, 2, \ldots$, (specificando di quale forma di convergenza si tratta).

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

D1)

- Dare la definizione di eventi indipendenti.
- Dimostrare che se A_i, $i \in \{1, \ldots, n\}$, sono eventi incompatibili tali che $\cup_i^n A_i = \Omega$, allora la probabilità di un evento B è data da $P(B) = \sum_1^n P(B|A_i)P(A_i)$
- Dimostrare il Teorema di Bayes.

N.B. Fornire tutti i dettagli delle dimostrazioni

D2)

- Data X una variabile aleatoria, dare la definizione di funzione di ripartizione $F(X)$ di X.
- Mostrare che $F(X)$ è non decrescente.
- Mostrare che $F(X)$ è continua a sinistra.
- Dimostrare che $\lim_{x \to -\infty} F(x) = 0$ e $\lim_{x \to +\infty} F(x) = 1$.

N.B. Fornire tutti i dettagli delle dimostrazioni

D3) Data una v.a. doppia (X, Y)

- definire la distribuzione condizionata di Y dato X, nel caso discreto e continuo
- definire il valore atteso condizionato $\mathbb{E}(Y|X)$ nei due casi discreto e continuo
- dimostrare che $\mathbb{E}\left(\mathbb{E}(Y|X)\right) = \mathbb{E}Y$
- definire la covarianza e dimostrare che si annulla per X e Y indipendenti

N.B. Fornire tutti i dettagli delle dimostrazioni.

CALCOLO DELLE PROBABILITA' E STATISTICA
19/07/2019
INGEGNERIA INFORMATICA E AUTOMATICA (A-L)
compito B

Cognome :	**Nome** :	**Matricola** :

$E1: \quad +E2: \quad +E3: \quad = \quad ; D1: \quad +D2: \quad +D3: \quad = \quad ; VOTO =$

E1) Per spostarsi da Roma a Napoli il 30% delle persone lo fa in treno, mentre gli altri usano la macchina. Quelli che scelgono il treno arrivano entro due ore con probabilità 0.75, mentre quelli che usano la macchina raggiungono questo obiettivo con probabilità 0.6.

(i) Calcolare la probabilità che un abitante di Roma arrivi a Napoli entro 2 ore.

(ii) Sapendo che un abitante di Roma è arrivato a Napoli entro 2 ore, qual'è la probabilità che abbia utilizzato il treno?

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

E2) Si estrae da un'urna di 40 palline numerate e colorate (in base al numero) nel modo seguente:

- Rosso dall'1 al 10
- Verde dall'11 al 20
- Giallo dal 21 al 30
- Blu dal 31 al 40

(i) Calcolare la probabilità che in due estrazioni SENZA ripetizione il secondo numero estratto sia maggiore del primo.

(ii) Calcolare la probabilità che in due estrazioni SENZA ripetizione il secondo numero estratto sia maggiore del primo, sapendo che il primo è Verde.

(iii) Supponiamo che ora vengano estratte le palline, a caso, CON reinserimento. Sia T il numero di estrazioni necessario ad ottenere per la prima volta una pallina rossa. Ha una distribuzione nota? Calcolare $P(T \leq 3)$

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

E3) Siano X e Y v.a. indipendenti e sia X distrubuita come un'esponenziale di parametro 1 e Y come una esponenziale di parametro μ.

(i) Si calcoli la probabilità che X sia maggiore di Y

(ii) Si studi la convergenza della successione $X^{1/n}$ per $n \to +\infty$ (specificando di quale forma di convergenza si tratta)

(iii) Siano X_j v.a. indipendenti ed identicamente distribuite come X, per ogni $j = 1, 2, ...$, si studi la convergenza della successione

$$Z_n = \frac{\sum_{j=1}^{n} X_j^{1/2} - n\frac{\sqrt{\pi}}{2}}{\sqrt{n}},$$

per $n \to +\infty$ (specificando di quale forma di convergenza si tratta). Si ricorda che $\Gamma(3/2) = \sqrt{\pi}/2$.

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

D1)

- Dare la definizione di eventi indipendenti.
- Dimostrare che se A_i, $i \in \{1, \dots, n\}$, sono eventi incompatibili tali che $\cup_i^n A_i = \Omega$, allora la probabilità di un evento B è data da $P(B) = \sum_1^n P(B|A_i)P(A_i)$
- Dimostrare il Teorema di Bayes.

N.B. Fornire tutti i dettagli delle dimostrazioni

D2) Data una v.a. doppia (X, Y)

- dare la definizione di funzione di ripartizione congiunta $F_{X,Y}(x, y)$
- enunciare le proprietà di $F_{X,Y}(x, y)$
- dimostrare a cosa converge per $x \to -\infty$, per $x \to +\infty$ e $y \to +\infty$ (sia singolarmente che congiuntamente)

N.B. Fornire tutti i dettagli delle dimostrazioni

D3)

- Definire la convergenza in probabilità di una successione di v.a.
- Dimostrare la diseguaglianza di Markov/Chebishev
- Dimostrare la legge dei grandi numeri in generale e nel caso di una v.a. $S_n \sim Bin(n, p)$ (si ricordi la relazione tra binomiale e Bernoulli).

N.B. Fornire tutti i dettagli delle dimostrazioni.