CALCOLO DELLE PROBABILITA' E STATISTICA
13-6-2019
INGEGNERIA INFORMATICA E AUTOMATICA (A-L)

Cognome :	Nome :	Matricola :

$E1:$	$+E2:$	$+E3:$	$=$	$;D1:$	$+D2:$	$+D3:$	$=$	$;VOTO=$

E1)

Un'urna contiene 100 dadi di cui la metà sono equilibrati, mentre gli altri sono stati manipolati in modo che, per ciascuno di essi, la probabilità di ottenere 1 è 1/2. Un dado viene estratto a caso e lanciato più volte. Indichiamo con X_i il risultato dell' $i-$esimo lancio.

(i) Calcolare la probabilità di avere 1 all'i-esimo lancio, ovvero $P(X_i = 1)$.

(ii) Calcolare la probabilità di avere 1 nei primi n lanci.

(iii) Calcolare la probabilità di avere 1 al terzo lancio, sapendo che si è avuto 1 nei primi due lanci.

(iv) Sia Z la v.a. che conta il numero di lanci necessario per ottenere la prima volta 1. Qual'è la probabilità che $Z = k$, con k intero positivo?
N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

(i) $$\boxed{P(X_i=1)} = P(X_i=1|E)\,P(E) + P(X_i=0|M)\,P(M)$$

dado equilibrato — dado manipolato

$$= \frac{1}{6}\cdot\frac{1}{2} + \frac{1}{2}\cdot\frac{1}{2} = \boxed{\frac{1}{3}}$$

(ii) $$\boxed{P(X_1=X_2=\dots=X_n=1)} = P(X_1=\dots=X_n=1|E)\,P(E) + P(X_1=\dots=X_n=1|M)\,P(M)$$

$$= \frac{1}{6^n}\frac{1}{2} + \frac{1}{2^n}\cdot\frac{1}{2} = \boxed{\frac{1+3^n}{3^n 2^{n+1}}}$$

(iii) $$\boxed{P(X_3=1|X_1=X_2=1)} = \frac{P(X_1=X_2=X_3=1)}{P(X_1=X_2=1)} =$$

per il punto (ii)

$$= \frac{\dfrac{1+3^3}{3^3 2^4}}{\dfrac{1+3^2}{3^2 2^3}} = \boxed{\frac{1+3^3}{6+2\cdot 3^3}} = \boxed{\frac{7}{15}}$$

(ii) $P(Z=k)=?$ $\quad$ $k=1,2,\dots$

$$\boxed{P(Z=k)} = P(Z=k\mid E)\,P(E) + P(Z=k\mid M)\,P(M)$$

$$= \underbrace{\frac{1}{6}\,\frac{5^{k-1}}{6^{k-1}}} \cdot \frac{1}{2} + \underbrace{\frac{1}{2}\,\frac{1}{2^{k-1}}} \cdot \frac{1}{2} = \boxed{\frac{5^{k-1}+3^{k}}{3^{k}\cdot 2^{k+1}}}$$

geometrische

E2)

Il numero di messaggi ricevuti da Antonio ogni ora si distribuisce come una v.a. X con distribuzione di Poisson di parametro $\lambda = 2$. Per Bruno invece il numero di messaggi in ogni ora si distribuisce come una v,.a . Y di Poisson con parametro $\mu = 3$. Le due v.a. sono indipendenti.

(i) Come si distribuisce il numero di messaggi totali ricevuti da Antonio e Bruno in ogni ora?

(ii) Sapendo che nell'ultima ora sono arrivati in totale 4 messaggi, qual'è la probabilità che 2 siano arrivati ad Antonio e 2 a Bruno?

(iii) Qual'è la probabilità che il primo messaggio arrivi ad Antonio?

N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

$X \sim \text{Poisson}(2) \qquad Y \sim \text{Poisson}(3)$ indipendenti

i) $\underline{Z = X+Y}$ si distribuisce come $\underline{\text{Poisson}(5)}$

come si verifica grazie alla convoluzione (nel discreto)

$$P(Z=j) = P\left(X+Y=j, \bigcup_{k=0}^{\infty}(X=k)\right)$$

$$= \sum_{k=0}^{\infty} P(Y=j-k, X=k)$$

per $k > j$ la prob. è $= 0$

per l'indip.

$$= \sum_{k=0}^{j} P(Y=j-k)\, P(X=k)$$

$$= \sum_{k=0}^{j} \frac{e^{-2}\, 2^k}{k!} \frac{e^{-3}\, 3^{j-k}}{(j-k)!} \cdot \frac{j!}{j!}$$

$$= \frac{e^{-5}}{j!} \sum_{k=0}^{j} \binom{j}{k} 2^k 3^{j-k} = \frac{e^{-5}}{j!}(2+3)^j$$

ii) $\boxed{P(X=Y=2 \mid Z=4)} = \dfrac{P(X=Y=2, Z=4)}{P(Z=4)}$

$$= \frac{P(X=Y=2)}{P(Z=4)} = \frac{\cancel{e^{-2}} \frac{2^2}{2!} \cancel{e^{-3}} \frac{3^2}{2!}}{\cancel{e^{-5}}\, 5^4/4!} = \frac{216}{625}$$

iii) $\boxed{P(X>Y \mid Z=1)} = \dfrac{P(X>Y,\ Z=1)}{P(Z=1)}$

$$= \frac{P(X=1,\ Y=0)}{e^{-5}\,5} = \frac{\cancel{e^{-2}}\,2\cdot\cancel{e^{-3}}}{\cancel{e^{-5}}\,5} = \boxed{\frac{2}{5}}$$

E3)

Le v.a. X e Y sono entrambi uniformi in $[0,1]$ ed indipendenti. Definiamo la successione

$$W_n = -\frac{\log(XY)}{n}$$

(i) Si calcoli la funzione di densità di W_n

(ii) Si tratta di una distribuzione nota?

(iii) Si studi la convergenza in distribuzione di $\{W_n\}_{n\geq 1}$, per $n \to +\infty$.

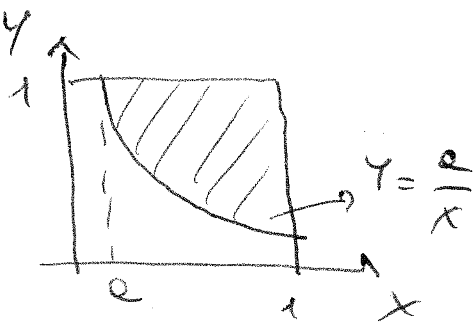
N.B. Tutte le risposte devono essere opportunamente giustificate

$W_n \in (0, +\infty)$ q.c.

i) $P(W_n < w) = P\left(-\frac{\lg(XY)}{n} < w\right) = P(-\lg(XY) < nw)$

$= P(\lg(XY) > -nw) = P(XY > e^{-nw})$

$= P\left(Y > \frac{e^{-nw}}{X}\right)$



Chiamo $e = e^{-nw}$

$P\left(Y > \frac{e}{X}\right) = \int_e^1 dx \int_{\frac{e}{x}}^1 dy = \int_e^1 \left(1 - \frac{e}{x}\right) dx$

$= 1 - e - e \lg x \Big]_e^1 = 1 - e + e \lg(e)$

$\Rightarrow P(W_n < w) = \begin{cases} 0 & w \leq 0 \\ 1 - e^{-wn}(1 + wn) & w \geq 0 \end{cases}$

ii) $f_{W_n}(w) = e^{-wn} w n^2 \mathbb{1}_{w>0} \Rightarrow \boxed{W_n \sim \text{Gamma}(n, 2)}$

iii) $\lim_{n\to\infty} F_{W_n}(w) = \begin{cases} 0 & w \leq 0 \\ 1 & w > 0 \end{cases} \Rightarrow \boxed{W_n \xrightarrow[P]{d} 0}$

D1)

- Elencare gli assiomi della probabilità
- Dimostrare la proprietà di monotonia della probabilità
- Dimostrare che per ogni insieme finito di eventi incompatibili A_k, $k \geq 1$, si ha che

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{n} A_k\right) = \sum_{k=1}^{n} P(A_k)$$

- Dimostrare che per un'infinità numerabile di eventi incompatibili A_k, $k \geq 1$ si ha che

$$P\left(\bigcup_{k=1}^{\infty} A_k\right) = \sum_{k=1}^{\infty} P(A_k)$$

N.B. Fornire tutti i dettagli delle dimostrazioni

D2) Siano $U = \max(X_1, ..., X_n)$ e $V = \min(X_1, ..., X_n)$, dove $X_1, ..., X_n$ sono v.a. indipendenti e identicamente distribuite

1. Ricavare la densità di U nel caso di $X_1, ..., X_n$ assolutamente continue con densità f_X
2. Ricavare la densità di V nel caso di $X_1, ..., X_n$ assolutamente continue con densità f_X
3. Come si modificano i punti 1 e 2 nel caso di v.a. $X_1, ..., X_n$ discrete?

N.B. Fornire tutti i dettagli delle dimostrazioni.

D3)

1. Definizione di convergenza in probabilità per una successione di v.a.
2. Relazione con la convergenza in distribuzione (con dimostrazione nel caso di v.a. limite degenere)
3. Enunciato e dimostrazione della legge dei grandi numeri

N.B. Fornire tutti i dettagli delle dimostrazioni