Teorema di Bayes (1)

Considerando un insieme di alternative $A_1, A_2, ...A_n$ (partizione dello spazio degli eventi) si trova la seguente espressione per la **probabilità condizionata**:

$$P(A_i|E) = \frac{P(E|A_i)P(A_i)}{P(E)} = \frac{P(E|A_i)P(A_i)}{\sum_{j=1}^{n} P(E|A_j)P(A_j)}$$

Dove:

- $P(A)$ è la probabilità a priori o probabilità marginale di A.
- $P(A|E)$ è la probabilità a posteriori (condizionata) di A, noto E.
- $P(E|A)$ è la probabilità condizionata di E, noto A (verosimiglianza)
- $P(E)$ è la probabilità a priori di E, e funge da costante di normalizzazione.

Nel nostro caso abbiamo 2 sole alternative:

- A_1 : paziente malato (M)
- A_2 : paziente sano (S)

Come evento E possiamo considerare l'evento osservato:
test positivo (test+) o test negativo (test-).

Il teorema di Bayes in questo caso sarà

$$P(A_i|E) = \frac{P(E|A_i)P(A_i)}{P(E|A_1)P(A_1) + P(E|A_2)P(A_2)} \qquad i = 1, 2$$

Intuitivamente, il teorema descrive il modo in cui le opinioni nell'osservare A siano arricchite dall'aver osservato l'evento E.

$$VPP = P(M|test+) = \frac{P(test+|M)P(M)}{P(test+|M)P(M) + P(test+|S)P(S)}$$

$$= \frac{\frac{a}{a+c}\cdot\frac{a+c}{n}}{\frac{a}{a+c}\cdot\frac{a+c}{n} + \frac{b}{b+d}\cdot\frac{b+d}{n}} = \frac{a}{a+b}$$

$$VPN = P(S|test-) = \frac{P(test-|S)P(S)}{P(test-|M)P(M) + P(test-|S)P(S)}$$

$$= \frac{\frac{d}{b+d}\cdot\frac{b+d}{n}}{\frac{c}{a+c}\cdot\frac{a+c}{n} + \frac{d}{b+d}\cdot\frac{b+d}{n}} = \frac{d}{d+c}$$

Si definisce sensibilità (SE) la probabilità che il test risulti positivo condizionato dalla presenza della malattia ed è stimata dalla proporzione di pazienti con la malattia nei quali il test risulta positivo:

$$\boxed{p(T+|M+) = \frac{p(T+, M+)}{p(M+)}}$$

Si definisce specificità (SP) la probabilità che il test risulti negativo condizionato dall'assenza della malattia ed è stimata dalla proporzione di pazienti senza la malattia nei quali il test risulta negativo

$$\boxed{p(T-|M-) = \frac{p(T-,M-)}{p(M-)}}$$

Alle due principali grandezze, la sensibilità e la specificità, ne va aggiunta un terza, la prevalenza P(M+), cioè il numero di soggetti che hanno la specifica malattia presenti, in un dato istante, nella popolazione sarà P(M-) = 1 – P(M+) il numero di soggetti che non hanno la specifica malattia presenti, in un dato istante, nella popolazione).

Nel caso di due situazioni mutuamente esclusive (affetto o non affetto dalla malattia A) il teorema di Bayes (5.13) può essere espresso anche nella forma

$$P(A|B) = \frac{P(B|A) \cdot P(A)}{P(B|A) \cdot P(A) + P(B|nonA) \cdot P(nonA)}$$

che, sostituendo A con $M+$ e sostituendo B con $T+$, può essere riscritta come

$$P(M+|T+) = \frac{P(T+|M+) \cdot P(M+)}{P(T+|M+) \cdot P(M+) + P(T+|M-) \cdot P(M-)}$$

$$P(M+|T+) = \frac{\text{sensibilità} \cdot \text{prevalenza}}{\text{sensibilità} \cdot \text{prevalenza} + (1 - \text{specificità}) \cdot (1 - \text{prevalenza})}$$

Relazione tra valori predittivi,prevalenza,se,sp

Valore predittivo di un esito positivo al test:

$$p(M^{+}|T^{+})=\frac{Sn\times Prev}{Sn\times Prev+(1\text{-}Sp)\times(1\text{-}Prev)}$$

Valore predittivo di un esito negativo al test:

$$p(M^{-}|T^{-})=\frac{Sp\times(1\text{-}Prev)}{Sp\times(1\text{-}Prev)+(1\text{-}Sn)\times Prev}$$