Riccardo Migliari

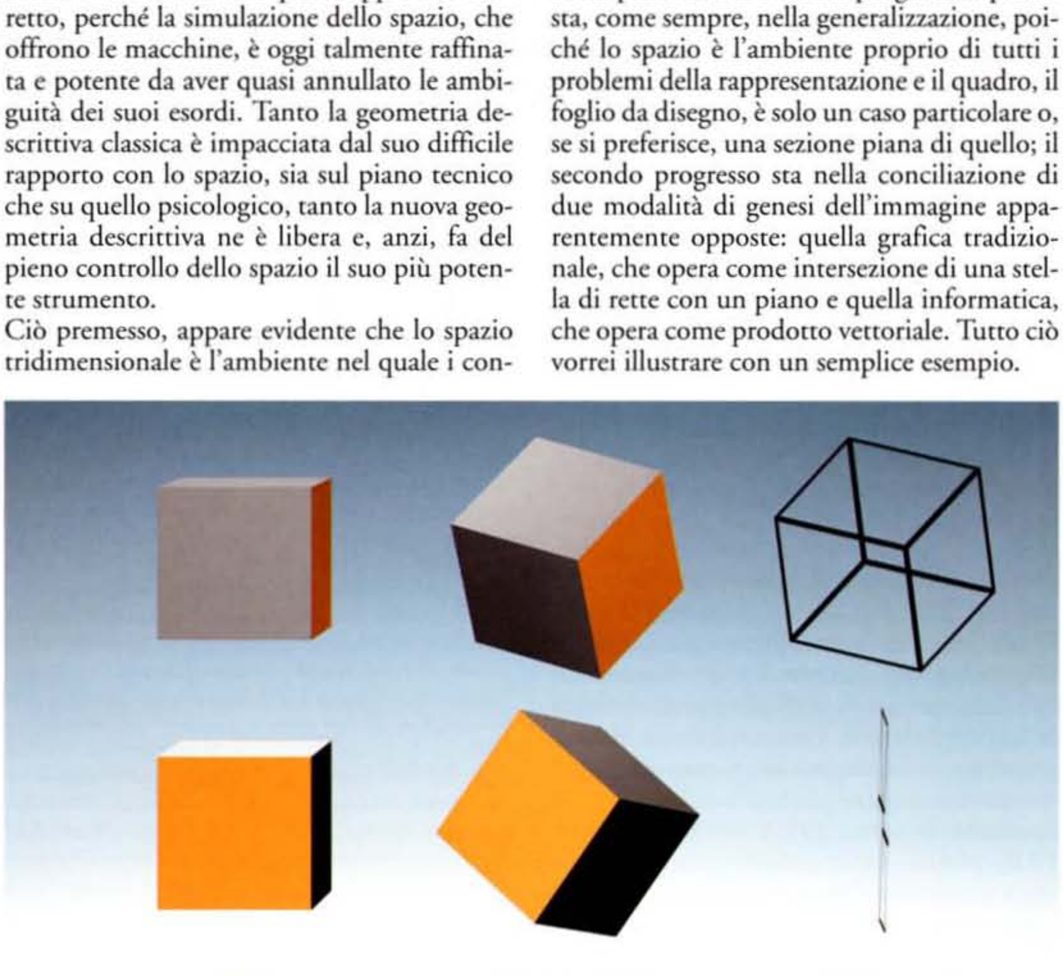
teoria/*theory*

Disegnare nello spazio
Drawing in Space

Wilhelm Fiedler sosteneva, già a fine Ottocento, che l'omologia dei sistemi solidi poteva essere considerata come «la teoria dell'arte di modellare». Questa omologia è, di fatto, la prospettiva di figure che abitano lo spazio oggettivo, proiettata su un secondo spazio sovrapposto al primo. E questa concezione è quanto mai attuale, perché consente di superare le differenze quasi inconciliabili tra la genesi dell'immagine grafica e la genesi dell'immagine digitale, essendo la prima legata all'idea della intersecazione della piramide visiva e la seconda ad un prodotto tra vettori nel quale non si prendono in considerazione le ordinate z, passando in questo modo, da uno spazio tridimensionale ad uno bidimensionale. Se l'operazione di proiezione e sezione viene invece costruita tutta nello spazio, come relazione tra uno spazio oggettivo e uno spazio prospettico o scenografico, non solo si superano le suddette antinomie, ma è anche possibile ricavare i metodi tradizionali come casi particolari di una concezione più generale e utilizzare la relazione suddetta per trasformare una figura nell'altra, ottenendo, ad esempio, le quadriche come trasformate proiettive della sfera.

At the end of the nineteenth century, Wilhelm Fiedler believed that the homology of solid systems could be considered "the theory of the art of modelling". This theory is in fact the perspective of figures that inhabit objective space, projected on a second space superimposed on the first. This concept is as topical as it ever was, because it makes it possible to overcome the almost irreconcilable differences between the genesis of the graphic image and that of the digital image given that the former is linked to the idea of the intersection of the visual pyramid and the latter to a product between vectors in which the z ordinates are not taken into consideration, thus passing from a three-dimensional to a two-dimensional space. If instead the projection and section are created completely in space, as a relationship between an objective space and a perspective and scenographic space, not only are these antimonies eliminated, but it is also possible to obtain traditional methods as special cases of a more general concept and use this relationship to turn one figure into another, thereby obtaining, for example, quadrics as projective transforms of the sphere.

Io credo che la maggiore difficoltà che si incontra nel conciliare la teoria della rappresentazione grafica con la teoria della rappresentazione informatica sta nell'approccio allo spazio. Nel primo caso, quello della geometria descrittiva tradizionale, questo approccio è indiretto, mediato dal foglio di carta e dal complesso codice geometrico della rappresentazione. Nel secondo caso questo approccio è diretto, perché la simulazione dello spazio, che offrono le macchine, è oggi talmente raffinata e potente da aver quasi annullato le ambiguità dei suoi esordi. Tanto la geometria descrittiva classica è impacciata dal suo difficile rapporto con lo spazio, sia sul piano tecnico che su quello psicologico, tanto la nuova geometria descrittiva ne è libera e, anzi, fa del pieno controllo dello spazio il suo più potente strumento.
Ciò premesso, appare evidente che lo spazio tridimensionale è l'ambiente nel quale i conflitti concettuali e operativi tra la geometria descrittiva classica e quella attuale possono esser risolti. Intendo dire che è possibile usare lo spazio in luogo del quadro, nella concezione teorica delle operazioni di proiezione, così come è possibile usare lo spazio in luogo del foglio di carta nella applicazione grafica di tali teorie. Intendo anche dire che questa sostituzione porta alcuni evidenti progressi: il primo sta, come sempre, nella generalizzazione, poiché lo spazio è l'ambiente proprio di tutti i problemi della rappresentazione e il quadro, il foglio da disegno, è solo un caso particolare o, se si preferisce, una sezione piana di quello; il secondo progresso sta nella conciliazione di due modalità di genesi dell'immagine apparentemente opposte: quella grafica tradizionale, che opera come intersezione di una stella di rette con un piano e quella informatica, che opera come prodotto vettoriale. Tutto ciò vorrei illustrare con un semplice esempio.



[X] [X'] = [X] [T] [X'] - [z]

I believe that the approach to space is the most difficult issue to solve when trying to reconcile the theory of graphic representation with that of computerised representation. In the case of traditional descriptive geometry, the approach is indirect, mediated by a sheet of paper and the complex geometric code of representation. In computerised representation the approach is direct because the way in which machines can simulate space is so powerful and sophisticated that it has all but eliminated the initial ambiguities. While classical descriptive geometry is hampered by its difficult technical and psychological relationship with space, new descriptive geometry is not, making it possible to turn the absolute control of space into its most powerful tool.
That said, it is obvious that three-dimensional space is the environment in which the operative and conceptual conflicts between classical and modern descriptive geometry can be resolved. I mean that it is possible to use space instead of the picture in the theoretical concept of projection; likewise it is possible to use space instead of a piece of paper in the graphic application of these theories. I also believe that this situation has obvious advantages: as always the first lies in generalisation, because space is the environment in which all representation problems exist and the picture, the drawing

1/ *Pagina precedente.* La rappresentazione digitale non fa uso dell'operazione di proiezione e sezione che è a fondamento della geometria descrittiva classica, ma opera una sorta di "schiacciamento" delle figure, annullando l'ordinata z che ne descrive la profondità.
Previous page. *Digital representation does not use the projections and sections normally associated with classical descriptive geometry, but creates a sort of "flattening" of the figures, neglecting the z ordinate illustrating its depth.*

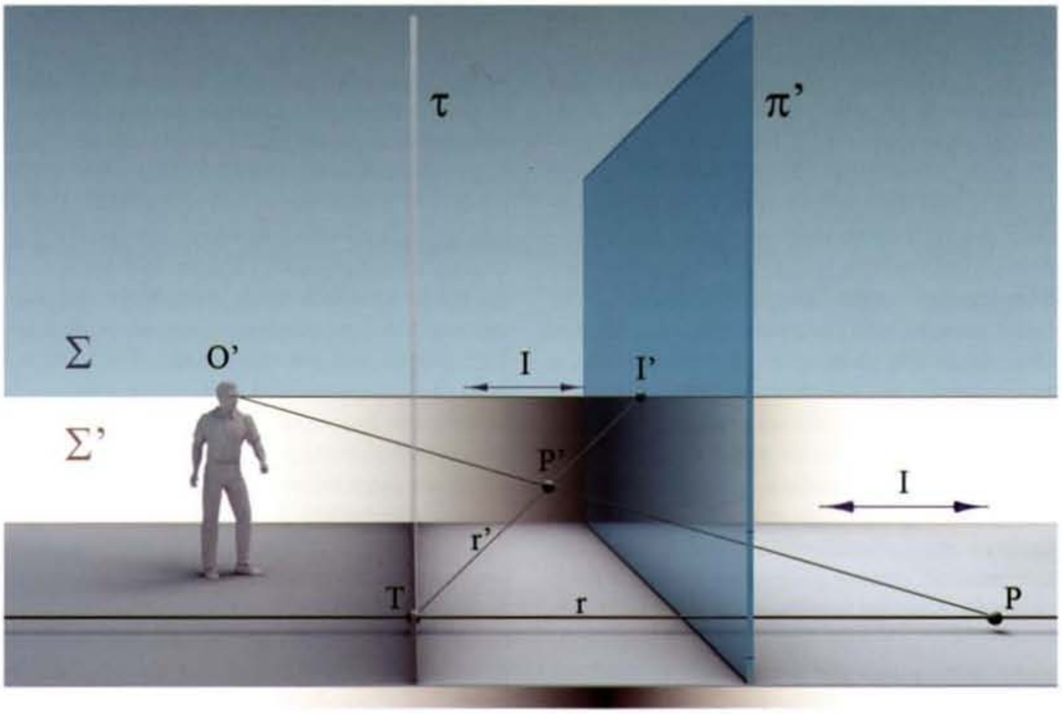
Ebbene, noi sappiamo che la geometria descrittiva produce le immagini, sulle quali poi opera, per mezzo della operazione di proiezione e sezione, che poi altro non è che un modello geometrico del fenomeno fisico della propagazione della luce. Questa operazione consiste nell'immaginare rette e piani che passano per un centro di proiezione, che è l'occhio di chi osserva, e tagliano il quadro, cioè il foglio da disegno. Ma quali profonde differenze rispetto alla rappresentazione informatica, sia essa matematica, come numerica o poligonale! Qui, nel mondo della geometria descrittiva classica, abbiamo carta e matita e la laboriosa costruzione di una sola immagine; là, abbiamo una finestra, lo schermo del computer, che si muove liberamente intorno ad un oggetto a tre dimensioni, mostrandoci, in tempo reale, quante immagini di quello desideriamo.
Il procedimento utilizzato nella rappresentazione matematica può essere riassunto in questo modo (fig. 1): l'oggetto è rappresentato per mezzo del vettore (o matrice) $[X]$ delle sue coordinate; si immagina di ruotarlo nello spazio, così che possa essere osservato nel modo desiderato, e si scrive la relativa matrice di trasformazione $[T]$; si calcola il prodotto $[X']=[X]\,[T]$. Infine si annulla, in questo prodotto, la colonna delle ordinate z. Insomma l'operazione di proiezione e sezione, nello spazio digitale, assomiglia ad uno schiacciamento[1] o contrazione dello spazio che annulla una delle sue dimensioni, e assomiglia a questa compressione molto più di quanto non assomigli alla *intersecazione della piramide visiva* di memoria albertiana. Dunque, apparentemente, mentre la "intersecazione" rinascimentale, e l'operazione di proiezione di un punto o di una retta, da un centro O' su un piano di quadro π', di memoria ottocentesca, si rifanno al medesimo concetto geometrico, lo schiacciamento dello spazio sulla superficie di un monitor, è operazione completamente diversa, che non coinvolge teorie di natura proiettiva. Se si parte da questo stato di fatto, le due teorie, quella proiettiva e quella informatica, appaiono tanto lontane da essere inconciliabili. Ma proviamo a introdurre lo spazio, nella operazione di proiezione e sezione; intendo dire, con ciò, proviamo a proiettare gli oggetti da rappresentare in uno spazio tridimensionale, anziché in uno spazio bidimensionale. Così facendo l'immagine dell'oggetto possiede ancora una geometria tridimensionale: se la proiezione è centrale (come nella prospettiva), un cubo si trasforma in un tronco di piramide; se la proiezione è parallela (come nell'assonometria), un cubo si trasforma in un parallelepipedo. Nel primo caso, tra lo spazio reale e lo spazio contratto, supporto dell'immagine, intercede una omologia solida; nel secondo caso un'affinità solida. Il passaggio dalla immagine solida alla immagine bidimensionale della geometria descrittiva classica avviene semplicemente riducendo, fino ad annullarlo, lo spessore dello spazio supporto dell'immagine. In questo modo i due procedimenti di generazione dell'immagine, quello classico e quello attuale, si identificano. Mi rendo conto, naturalmente, che a prima vista questa può sembrare una «complicazione di geometria descrittiva», per citare una battuta di Orseolo Fasolo, quando censurava certe cattive abitudini dei colleghi più giovani. E tuttavia non lo è, perché la caratteristica delle complicazioni è la loro inutilità, mentre questo modo di porre la questione serve a comprendere che matita e computer sono due strumenti diversi applicati a un fine comune.
Ciò detto, vorrei far vedere come questa generalizzazione dell'operazione di proiezione e sezione non sia poi così complessa come può sembrare a prima vista. Cominciamo con lo stabilire le relazioni che legano un oggetto dello spazio reale alla sua prospettiva solida. Sono dati un centro di proiezione O' nello spazio reale Σ e uno spazio Σ', supporto della rappresentazione, che chiameremo *spazio scenografico*. Questo spazio è indefinitamente esteso e sovrapposto allo spazio reale, ma, per ora, consideriamone solo una piccola parte, quella compresa tra due piani, π' e τ, entrambi verticali e posti innanzi all'osservatore (fig. 2). Il primo piano, detto anche *piano delle fughe* o *primo piano limite*, ospiterà le proiezioni dei punti dello spazio reale che si trovano a una distanza incommensurabile, cioè le proiezioni dei cosiddetti "punti all'infinito". L'altro piano, detto *piano delle tracce* o *piano di collineazione*, ospiterà i pun-

paper, is only a special case or, if you prefer, a flat section of that picture; the second advantage is that it reconciles two seemingly divergent generative models of the image – the traditional graphic model which acts as an intersection between a star of networks and a plane, and the computerised model which acts as a vector product. I would like to illustrate this using a simple example.
We know that descriptive geometry produces images which it then exploits using projections and sections that are nothing but a geometric model of the physical propagation of light. This involves imagining straight lines and flat surfaces that pass through a centre of projection, which is the eye of the observer, and cut the picture, i.e. the piece of paper. But what enormous mathematical, numeric or polygonal differences exist compared to computerised representation! The world of classical descriptive geometry uses pencil and paper and the laborious construction of a single image while computerised representation has a window, a screen which moves freely around a three-dimensional object immediately providing us with as many images as we like.
The procedure used in the mathematical representation can be summarised as follows (fig. 1): the object is represented by the vector (or matrix) [X] of its coordinates; we can rotate it in space to see it from a chosen viewpoint and then write the relative transformation matrix [T]; then we calculate the product [X']=[X] [T]. Finally, in this product we eliminate the column of the ordinates z. In short, projection and section in digital space look like a flattening[1] or contraction of the space that cancels out one of its dimensions; it looks more like a compression than it does an intersection of the visual pyramid by Alberti. So it is clear that while Renaissance "intersection" of the viewing piramid *and the projection of a point or a straight line, from a centre* O' *on an eighteenth-century type picture plane* π', *both refer to the same geometric concept, the flattening of space on the surface of a screen is completely different and does not involve projective theories. If this is our starting point then the two theories, projective and computerised, seem so far apart as to be irreconcilable.*

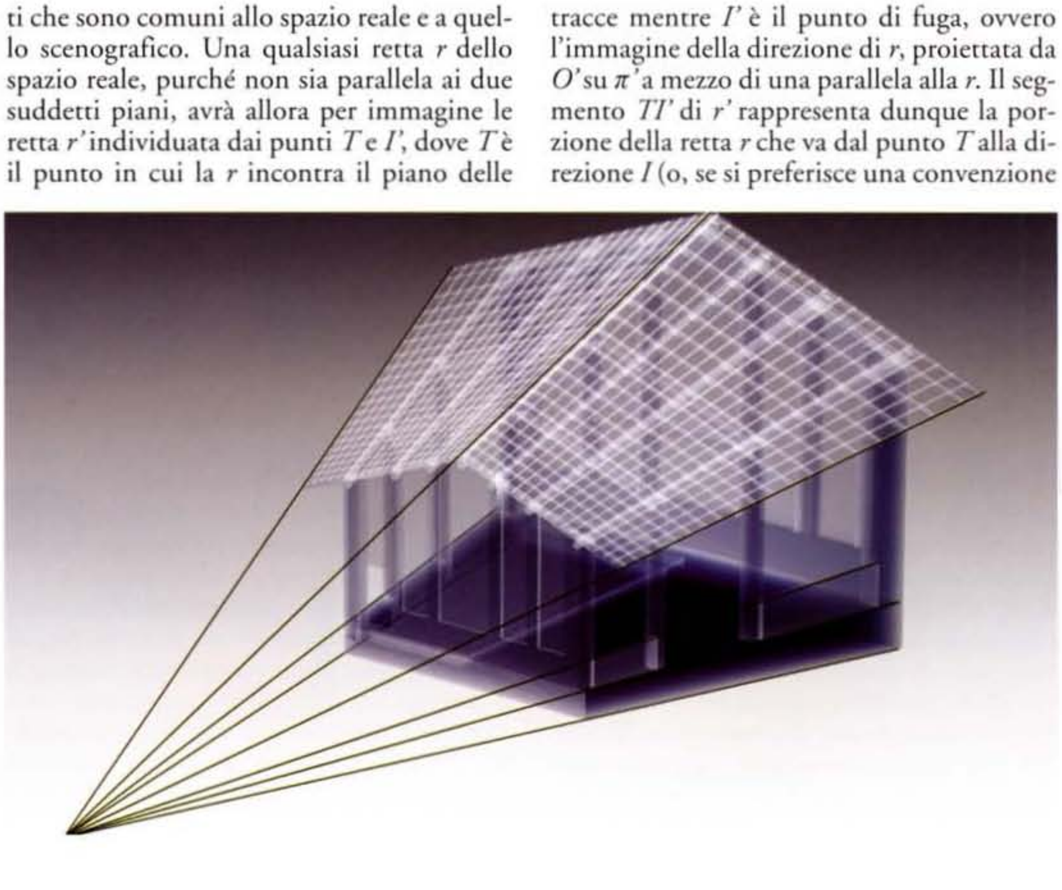
2/ La proiezione da un centro O' di figure geometriche che appartengono ad uno spazio Σ, su uno spazio Σ' istituisce una corrispondenza biunivoca tra i due spazi. Σ è uno spazio isotropo, Σ' è uno spazio anisotropo, scenografico. La fascia sfumata allude alla compressione di Σ' nel volume compreso tra i piani τ e π', e alla sua rarefazione fuori di questo volume.
Projection of geometric figures belonging to a Σ space from a centre O' on a Σ' space creates a biunivocal correspondence between the two spaces. Σ is an isotropic space, Σ' is an anisotropic, scenographic space. The shaded band refers to the compression of Σ' in the volume between the planes τ and π', and to its rarefaction outside this volume.

3/ Un edificio immerso nello spazio Σ viene proiettato nello spazio Σ' nella prospettiva solida che si vede in basso. Si tratta di una scenografia analoga ai celebri esempi realizzati dal Bramante, dal Borromini e da altri artisti.
A building immersed in the Σ space is projected in the Σ' space in the solid perspective visible at the picture. It is a scenographic design similar to the more famous ones by Bramante, Borromini and other artists.

Let's try now to introduce space in projection and section, in other words, let's try and project the objects to be represented in a three-dimensional rather than two-dimensional space. If we do this the object still has a three-dimensional geometry: if the projection is centred (as in perspective), a cube becomes a truncated pyramid; if the projection is parallel (as in axonometric projection) it becomes a parallelepiped. In the first case, a solid homology, supported by the image, intercedes between real and contracted space; in the second case, a solid affinity. In classical descriptive geometry the shift from a solid image to a two-dimensional image occurs simply by reducing (and almost eliminating) the thickness of the space supporting the image. Stated thus, the two ways in which the image is created (classical and modern) coincide. Naturally, I realise that this can ostensibly appear to be what Orseolo Fasolo called a "complication of descriptive geometry" when censuring certain bad habits of some of his younger colleagues. Yet it is not, because these complications are useless, while this approach helps us to understand that pencils and computers are two different tools used to achieve the same goal.
Having said this I'd like to show how this generalisation of projection and section is not as complicated as it might first appear. Let's begin by establishing what relationships exist between an object in real space and its solid perspective. Given is a centre of projection O' *in real space* Σ *and a space* Σ', *the support of the representation, which we will call* scenographic space. *This space is endless and superimposed on real space, but for now let's consider only a small part, the part between the two planes* π' *and* τ, *both vertical and placed in front of the observer (fig. 2). The* first plane, *also called the* vanishing plane *(plane of the vanishing points and vanishing lines) or first limit plane, will host the projections of the points of real space which are at an immeasurable distance, i.e., the projections of the "points at infinity". The other plane, also called the* plane of the traces (plane of the traces of the straight lines and of the traces of the planes) *or plane of collineation, will host the points shared by real and scenographic space. Any straight line* r *of*



ti che sono comuni allo spazio reale e a quello scenografico. Una qualsiasi retta r dello spazio reale, purché non sia parallela ai due suddetti piani, avrà allora per immagine le retta r' individuata dai punti T e I', dove T è il punto in cui la r incontra il piano delle tracce mentre I' è il punto di fuga, ovvero l'immagine della direzione di r, proiettata da O' su π' a mezzo di una parallela alla r. Il segmento TI' di r' rappresenta dunque la porzione della retta r che va dal punto T alla direzione I (o, se si preferisce una convenzione



meno accurata ma più espressiva, che va dal punto T al "punto all'infinito" I).
Ma, come abbiamo detto, i due spazi Σ e Σ' sono entrambi indefinitamente estesi e perciò qualsiasi punto P della retta r, avrà la proiezione P' sulla retta r' e sarà il punto in cui la retta proiettante $O'P$ incontra la r'. La retta r è dunque interamente rappresentata dalla retta r', interamente, cioè anche nelle parti che giacciono fuori dalla porzione di spazio compresa tra il piano delle tracce e il piano delle fughe. Viceversa, ad ogni punto Q' della retta r' corrisponde un punto Q della retta r, quello staccato, su r, dalla retta proiettante $O'Q'$. Ciò si esprime, in sintesi, dicendo che la corrispondenza tra r ed r' è biunivoca. E questa corrispondenza riguarda tutti i punti delle due rette, entrambe indefinitamente estese nello spazio.
Se ora consideriamo un certo numero di intervalli eguali tra loro, staccati su r, possiamo osservare come a questi intervalli corrispondano su r' altrettanti intervalli in progressione prospettica. Ciò descrive, sia pure sommariamente, le diverse caratteristiche dei due spazi Σ e Σ', indefinitamente estesi e sovrapposti, ma isotropo il primo, quello oggettivo, anisotropo il secondo, quello scenografico (vedi, ancora, fig. 1).
Stabiliamo di chiamare f la distanza focale, cioè la distanza di O' dal piano delle fughe π' (o primo piano limite) e d la distanza tra il piano delle tracce τ (o di collineazione) e il piano delle fughe π', che è una importante caratteristica della prospettiva solida perché definisce l'anisotropia, ovvero la compressione dello spazio scenografico Σ' nell'intervallo tra i due piani e la dilatazione del medesimo fuori da quelli. Se assumiamo come riferimento un sistema XYZ che ha l'origine in O' e l'asse Z perpendicolare ai piani τ e π', le relazioni che legano le coordinate x', y', z' di un punto dello spazio scenografico, alle coordinate x, y, z, di un punto dello spazio reale, sono[2]:
$x' = (f \times x)/(d + z)$;
$y' = (f \times y)/(d + z)$;
$z' = (f \times z)/(d + z)$.
Queste relazioni permettono di creare rapidamente la prospettiva solida di un oggetto anche complesso. Consideriamo, ad esempio, il modello di un fienile (fig. 4a) la cui copertura, costituita da una fitta trama di travi e travetti, comporta la rappresentazione di oltre tremila poligoni. I programmi dedicati alla rappresentazione numerica (o poligonale) dispongono spesso di strumenti, detti "deformatori" o "modificatori", che permettono di utilizzare formule per trasformare un oggetto. Ad esempio, inserendo le espressioni suddette in Formula (*Objects / Deformation*) di Cinema 4D, si ottiene immediatamente la scenografia del fienile (fig. 4b). Il modello può inoltre essere esportato per successive elaborazioni. E la più immediata di queste elaborazioni è la verifica della convergenza degli spigoli che erano paralleli nel mondo reale, in un punto di fuga, nel mondo illusorio della prospettiva solida (fig. 4).
Supponiamo ora di traslare il primo piano limite, fino a farlo coincidere con il piano di collineazione: il risultato che si ottiene è una prospettiva piana (fig. 5). Per realizzare questa deformazione, basta annullare d e porre:
$f' = f - d$
dove f è la lunghezza focale originaria e f' è la nuova lunghezza focale, modificata a seguito della traslazione del piano delle fughe sul piano delle tracce. Perciò, per dirla con parole più familiari a chi si occupa di prospettiva, ora il piano delle fughe e il piano delle tracce si confondono in quello che è comunemente noto come il piano di quadro.
Con questo procedimento abbiamo dunque ottenuto una prospettiva tradizionale attraverso l'annullamento della profondità, esattamente come avviene nella genesi informatica dell'immagine, sia di tipo centrale o parallelo. Possiamo dunque concludere che i metodi di rappresentazione, siano essi grafici che informatici, utilizzano entrambi la proiezione solida per generare le immagini degli oggetti rappresentati e che questa proiezione si specializza poi in diversi modi, secondo il metodo nel quale si trova ad operare. D'altronde, questa visione unificante dei metodi non è affatto una novità, dal momento che già Wilhelm Fiedler[3] riconosceva alla prospettiva solida questo ruolo di metodo generale dal quale discendono tutti gli altri. Sarebbe però assai riduttivo vedere nella prospettiva solida soltanto un modo per unificare i metodi di rappresentazione, perché questo

real space, so long as it is not parallel to the said planes, will have the straight line r' *created by points* T *and* I', *where* T *is the point in which* r *meets the plane of the traces while* I' *is the vanishing point, in other words the image of the direction of* r, *projected by* O' *on* π' *by a parallel to* r. *The* TI' *of* r' *therefore represents the portion of the straight line* r *that runs from point* T *to the direction* I *(or, if you prefer a less accurate but more expressive convention that runs from point* T *to the "point at infinity"* I*).*
However, the two spaces Σ *and* Σ' *are both prolonged ad infinitum and therefore any point* P *of the straight line* r *will have a projection* P' *on the straight line* r' *and will be the point in which the projecting straight line* O'P *will meet* r'. *The straight line* r *is therefore entirely represented by the straight line* r', *in other words also in the parts that lie outside the portion of space included between the plane of the traces and the vanishing plane. Vice versa, to every point* Q' *of the straight line* r' *corresponds a point* Q *of the straight line* r, *the one detached, on* r, *by the projecting straight line* O'Q'. *In short, this is expressed by saying that the correspondence between* r *and* r' *is biunivocal. And this correspondence is the same for all the points of the two straight lines, both prolonged ad infinitum in space.*
If we now consider a certain number of equal intervals, detached on r, *we can observe how on* r' *the same number of intervals in perspective progression correspond to these intervals. This summarises, albeit briefly, the different characteristics of the two infinite and superimposed spaces* Σ *and* Σ', *but the first objective space is isotropic while the second scenographic space is anisotropic (see fig. 1).*
Let's decide to call the focal distance f, *in other words the distance of* O' *from the vanishing plane* π' *(or first limit plane) and* d *the distance between the plane of the traces* τ *(or of collineation) and the vanishing plane* π', *which is an important characteristic of the solid perspective because it defines anisotropy, i.e., the compression of the scenographic space* Σ' *in the interval between the two planes and the latter's dilation outside the planes. If we take as a reference an* XYZ *system originating in* O' *and the* Z *axis perpendicular to the*

4/ La prospettiva solida è suscettibile di qualsiasi altra operazione, come la sua trasformazione in modello fisico tramite tecniche di prototipazione, oppure anche, semplicemente, come la verifica geometrica della convergenza delle rette che sono proiezioni di rette oggettive tra loro parallele.
Solid perspective is susceptible to other operations, for instance it can be turned into a physical model using prototyping techniques, or simply be used to geometrically verify the convergence of the straight lines which are projections of objective straight lines parallel to each other.

5/ Traslando il piano delle fughe, ovvero del primo piano limite, fino a farlo coincidere con il piano delle tracce o piano di collineazione, si ottiene la prospettiva piana tradizionale. Qui lo schiacciamento dello spazio prospettico è raffigurato un istante prima del collasso.
Moving the vanishing plane, in other words the first limit plane, until it coincides with the plane of the traces or plane of collineation, creates traditional flat perspective. Here the "flattening" of the perspective space is shown just before it collapses.

planes τ and π', the relationships between the x', y', z' *coordinates of a point of the scenographic space and the* x, y, z, *coordinates of a point in real space, are as follows*[2]:

$x' = (f \times x)/(d + z)$;

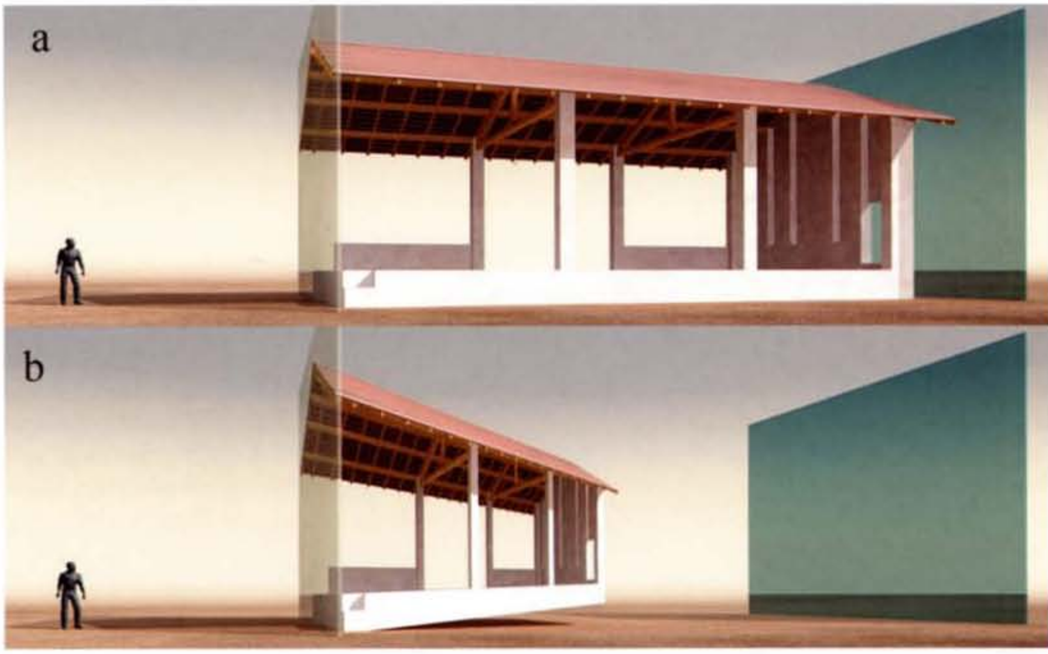
$y' = (f \times y)/(d + z)$;

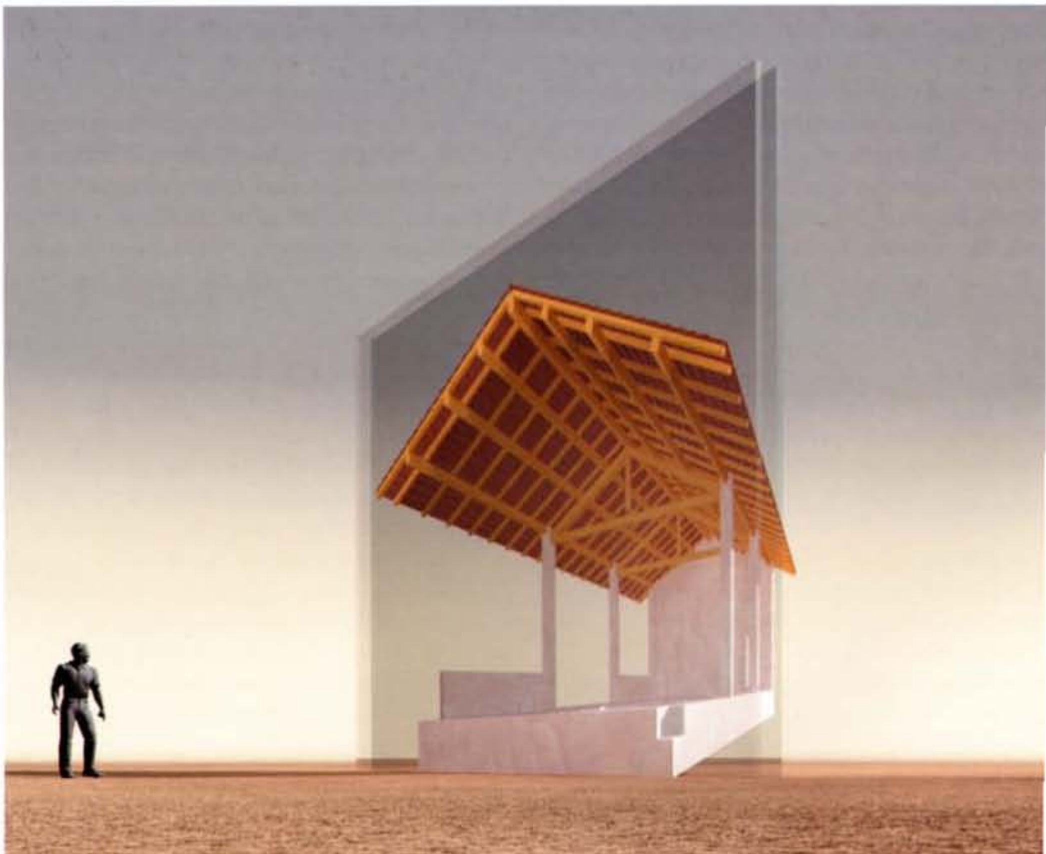
$z' = (f \times z)/(d + z)$.

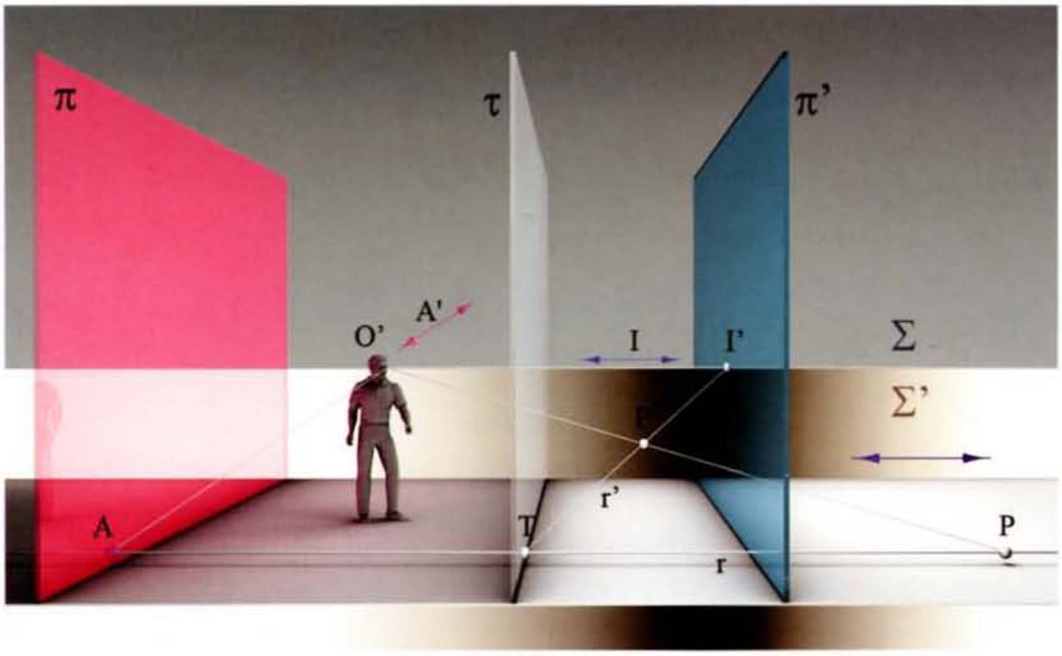
These relationships make it possible to rapidly create the solid perspective of even a complex object. Let's consider, for example, the model of a barn (fig. 4a): the intricate network of beams and joists of the roof requires the representation of over three thousand polygons. Numerical (or polygonal) representation programmes often have tools, called "deformers" or "modifiers" that allow formulas to be used to transform the object. For example, by inserting the expressions in a 4D Cinema Formula (Objects / Deformation), you immediately get the scenographic design of the barn (fig. 4b). The model can also be exported for further elaboration. And the most immediate of these elaborations is confirmation of the convergence of the edges, which were parallel in the real world, in a vanishing point, in the illusory world of solid perspective (fig. 4).
Let's suppose we move the first limit plane until it coincides with the plane of collineation: the result is a flat perspective (fig. 5). To achieve this deformation, all you have to do is cancel d *and equate:*

$f' = f - d$

where f *is the original focal length and* f' *is the new focal length, modified after moving the vanishing plane to the plane of the traces. So to use words understood by people familiar with perspective, the vanishing plane and the plane of the traces now merge in what is commonly called the picture plane.*
Using this procedure we obtained a traditional perspective by eliminating depth, similar to what happens when we create computer-generated images, be they centred or parallel. We can therefore conclude that both graphic and computerised representation methods use solid projection to create images of the represented objects and that this projection can then be modified in various ways depending on the method employed. After all, this unifying vision of methods is not new ever since Wilhelm Fiedler[3] *considered that solid perspective could*







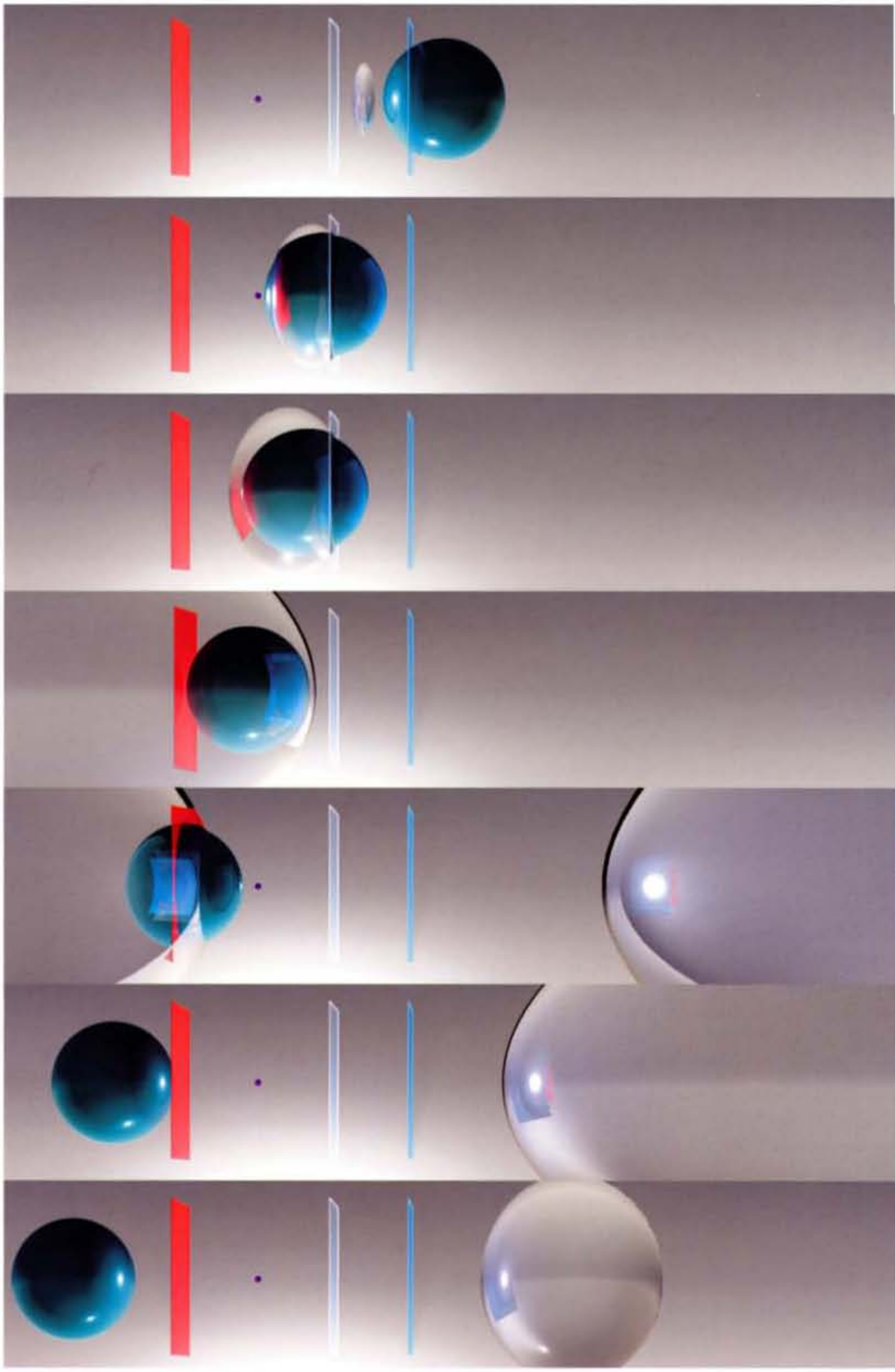
6/ L'introduzione del secondo piano limite, in rosso nella figura, consente di sperimentare completamente la trasformazione proiettiva delle figure che abitano lo spazio oggettivo Σ: così come esistono punti dello spazio profondo Σ che si trasformano in punti accessibili dello spazio scenografico Σ', così esistono punti dello spazio oggettivo Σ che si trasformano in punti dello spazio profondo Σ', e sono i punti del piano rosso, inteso indefinitamente esteso. I due piani (azzurro e rosso) possono essere visti come i due cancelli di un porto: quello azzurro riceve viaggiatori provenienti dallo spazio profondo, quello rosso invia viaggiatori nello spazio profondo.
Introduction of a second limit plane (in red), makes it possible to experiment with the complete projective transformation of the figures in objective space Σ: similar to the points of deep space Σ which turn into accessible points of scenographic space Σ', there are points of objective space Σ that turn into points of deep space Σ', and they are precisely the points of the red plane, considered as extended to infinity. The two planes, blue and red, can be considered as two gates of a portal: the blue one welcomes travellers from deep space, the red one sends travellers into deep space.

strumento è altresì capace di altre trasformazioni che hanno un interesse teorico notevole. Per ben comprendere queste possibilità è necessario introdurre nella macchina prospettica che abbiamo costruito, un secondo piano limite π, posto alle spalle dell'osservatore alla distanza che abbiamo chiamato d e che separa anche il piano di collineazione dal primo piano limite π'. In questo modo, la macchina prospettica assume tutte le valenze di una omologia solida, ovvero della relazione, più generale, che intercede tra due spazi sovrapposti. Vediamo come (fig. 6).
Abbiamo prima stabilito la biunivocità della corrispondenza tra le rette r ed r', facendo vedere come ad un qualsiasi punto P di r corrisponda un punto P' di r' e viceversa. Consideriamo allora il punto A che la retta r ha in comune con il secondo piano limite, π. È facile dimostrare che la retta $O'A$ risulta parallela alla r'[4] e che, di conseguenza, al punto A della retta r corrisponde la direzione A' della retta r'. Per rendere questa corrispondenza più espressiva e comprensibile, possiamo paragonare i due piani limite ai cancelli di un porto spaziale, nel quel ormeggiano astronavi capaci di raggiungere i limiti dell'Universo. Il primo piano limite è il cancello dal quale passano viaggiatori in arrivo dallo spazio profondo; il secondo piano limite è il cancello dal quale passano i viaggiatori in partenza per lo spazio profondo. Per sperimentare le proprietà di questi cancelli non c'è modo migliore che attraversarli: purtroppo però, possiamo attraversare solo π, il secondo, quello che appartiene al nostro spazio Σ, giacché il primo è immerso in uno spazio illusorio, quello scenografico, Σ'.
Consideriamo, ad esempio, una sfera Ω, e seguiamo lei e la sua immagine o trasformazione Ω' nel suo approssimarsi al secondo piano limite (fig. 7). A misura che Ω si avvicina a π, Ω' assume l'aspetto (e le proprietà geometriche) di un ellissoide sempre più allungato. Nel momento in cui Ω tocca il piano π, il corrispondente punto di Ω' parte per lo spazio profondo e l'ellissoide si muta in un paraboloide. Ora Ω sta attraversando π e un'intera classe di suoi punti viene proiettata a una distanza incommensurabile, perciò il paraboloide si spezza nelle due falde di un iperboloide. Infine, Ω attraversa il secondo piano limite, ma prima di staccarsene lo tocca ancora in un solo punto, opposto al primo e Ω', di conseguenza, si trasforma ancora in un paraboloide prima di ritornare ellissoide (un video che mostra l'evolversi della trasformazione può essere scaricati all'indirizzo http:// www.migliari.it /download /sfera.zip).

effectively be used as a general method, a method on which all others are based.
It would however be restrictive to consider solid perspective only as a way to unify representation methods, because this tool is also capable of other transformations of considerable theoretical interest. To fully understand these possibilities, we have to introduce into the perspective machine a second limit plane π *behind the back of the observer at the distance we have called* d *which also separates the plane of collineation from the first limit plane* π'*. In this manner, the perspective machine effectively becomes a solid homology, in other words, of the more general relationship between two superimposed spaces. Let's see how (fig. 6).*
Earlier we established the biunivocal nature of the correspondence between the straight line r *and* r'*, demonstrating how at any point* P *of* r *corresponds a point* P' *of* r' *and vice versa. Let's now consider point* A *which the straight line* r *shares with the second limit plane,* π*. It's easy to demonstrate that the straight line* O'A *is parallel to* r'[4] *and that therefore the direction* A' *of the straight line* r' *corresponds to point* A *of the straight line* r*. To make this correspondence more expressive and understandable, we can compare the two limit planes to the gates of a spaceport used by spaceships that can reach the outermost ends of the Universe. The first limit plane is the gate used by passengers arriving from outer space; the second limit plane is the gate used by passengers departing for outer space. There is no better way to experiment the properties of these gates than to pass through them: unfortunately however, we can only pass through* π*, the second one, the one that belongs to our* Σ *space since the first is immersed in illusory, i.e., scenographic space* Σ'*.*
Let's consider for example a Ω *sphere and follow it or its image or transformation* Ω' *as it is gets closer to the second limit plane (fig. 7). As* Ω *gets closer to* π*,* Ω' *starts to look like an increasingly elongated ellipsoid (and takes on its geometric properties). When* Ω *touches the plane* π*, the corresponding point of* Ω' *leaves for deep space and the ellipsoid changes into a paraboloid. Now* Ω *is crossing* π *and an entire class of its points is projected at an incommensurable distance, therefore the*

7/ Sono qui illustrate le metamorfosi della proiezione solida di un sfera che si avvicina al secondo piano limite, lo tocca, lo attraversa, lo tocca nuovamente in un punto opposto al primo e infine lo oltrepassa. Le metamorfosi della sfera sono rese in trasparenza, affinché si possa cogliere meglio la relazione omologica. Ad esempio, nel secondo e nel terzo passaggio si nota che le due figure hanno in comune una classe di punti uniti sul piano τ, ciò che è sufficiente per dimostrare che questo ellissoide ammette una schiera di sezioni circolari.

Illustration of the metamorphoses of the solid projection of a sphere that draws closer to the second limit plane, touches it, crosses it, touches it again at a point opposite to the first and finally passes through it. The metamorphoses of the sphere are transparent, making it possible to see the homological relationship. For example, in the second and third crossing, note that the two figures share a class of points joined on plane τ. This is sufficient to show that this ellipsoid supports a series of circular sections.



paraboloid breaks into the two sides of a hyperboloid. Finally, the Ω crosses the second limit plane, but before leaving it, it touches it again just once, opposite to the first and Ω' and therefore changes again into a paraboloid before turning into an ellipsoid (a video showing this transformation can be seen on the web at http://www.migliari.it/download/sfera. zip).
At this point I would like to warn those who would like to test these transformations of one small problem that can be explained by the radical differences between our abstract reasoning and banal mechanical calculations. In actual fact, if a computer is made to represent the projections of a figure that crosses the second limit plane, all it can do is to signal an insurmountable error: machines cannot comprehend infinity. They only deal with finite quantities, either large or small. Infinity is a metaphysical concept.
I solved this problem by creating a thin volume (not visible in the figure) that coincides with plane π, and I subtracted this volume from the objects that cross the limit. So in the example of the sphere, in its calculations the machine can ignore the points which in theory are travelling in deep space.
So Piergiorgio Odifreddi[5] was right in distinguishing between science and metaphysics, but I also agree with those who use their imagination to think about and enjoy entertaining concepts that go beyond the limits of our everyday world.
So in conclusion, I believe that the idea of using projection and section which normally work on space, and only in particular on the plane, as on any other surface, should replace the traditional concept announced in the incipit of any treatise of descriptive geometry. Apart from resolving the apparent differences in the theories at the roots of graphic and computerised methods, this concept induces a more general vision of perspective, but it also opens the door to the representation of the homographies of space and any ensuing surfaces. I believe it is helpful if treatises like those written by Aschieri[6], which tackle this subject quite abstractly, trusting only in the visionary abilities of the reader, are finally illustrated using three-dimensional models and any static, dynamic and interactive images they can produce.

A questo punto debbo avvertire quanti volessero sperimentare queste trasformazioni di un piccolo problema che si spiega con la profonda differenza tra le astrazioni del nostro ragionare e le banalità del calcolo meccanico. In realtà, se un computer viene indotto a rappresentare le proiezioni di una figura che attraversa il secondo piano limite, non può far altro che denunciare un errore insuperabile: le macchine non concepiscono l'infinito. Esse trattano solo grandezze finite, nel grande come nel piccolo. L'infinito è un concetto metafisico. Ho risolto questo problema creando un sottile volume (non visibile nella figura) che collima con il piano π, e ho sottratto questo volume agli oggetti che attraversano il limite. Così, nell'esempio della sfera, la macchina può trascurare nel calcolo proprio quei punti che nella teoria viaggiano nelle profondità dello spazio.
E quindi ha ragione Piergiorgio Odifreddi[5] a voler fare dei distinguo, tra scienza e metafisica, ma ha anche ragione, io credo, chi riserva alla propria immaginazione la capacità e il piacere di gestire concetti che vanno oltre i limiti del nostro mondo quotidiano. Dunque, per concludere, l'idea di una operazione di proiezione e sezione che in generale opera sullo spazio e solo in particolare sul piano, come su qualsiasi superficie, dovrebbe prendere il posto, io credo, di quella tradizionale che si trova enunciata nell'incipit di qualsiasi trattato di geometria descrittiva. Questa concezione, oltre a risolvere le apparenti difformità delle teorie che sono a fondamento dei metodi grafici e dei metodi informatici, induce una visione più generale della prospettiva, ma apre anche le porte alla rappresentazione delle omografie dello spazio e delle superfici che ne derivano. È auspicabile, io credo, che trattati come quello di Aschieri[6], che affrontano questo argomento nella più assoluta astrazione, fidando unicamente nelle capacità visionarie del lettore, trovino finalmente una trascrizione fatta di modelli tridimensionali e delle immagini, statiche, dinamiche e interattive, che possono da quelli essere ricavate.

1. Cfr. David F. Rogers, James Alan Adams, *Mathematical elements for computer graphics*, Mc Graw-Hill, New York 1990. Esplicitamente a p. 139: «[...] *the effect of the projection is to neglect the z coordinate*».

2. Per le considerazioni geometriche e i passaggi matematici che conducono a questo risultato, si veda Riccardo Migliari, *Ha la prospettiva un futuro? (Has Man a future?)*, in *Ikhnos. Analisi grafica e storia della rappresentazione*, Siracusa 2005, pp. 11-28. Il testo è anche disponibile all'indirizzo http://www.migliari.it/pagine/ricerche_it.html.

3. Guglielmo (Wilhelm) Fiedler, *Trattato di Geometria Descrittiva*, tradotto da Antonio Sayno e Ernesto Padova, Successori Le Monnier, Firenze 1874. Ad illuminare l'innovativa concezione del Fiedler, oggi più che mai attuale, basta il titolo del capitolo che chiude la trattazione della prospettiva: *L'omologia dei sistemi solidi considerata come la teoria dei metodi dell'arte di modellare*. È curioso osservare come il verbo modellare, che si coniuga poi nelle espressioni "modellazione" e "*modelling*" sia proprio quello oggi prevalentemente usato per distinguere la rappresentazione grafica dalla rappresentazione informatica. Questa visione del Fiedler ci conforta dunque nell'idea che una concezione più generale dell'operazione di proiezione e sezione, come quella che qui è molto brevemente riassunta, sia alla base del rinnovamento della geometria descrittiva e della integrazione, nel suo corpus disciplinare, delle tecniche digitali di rappresentazione dello spazio.

4. La lunghezza del segmento OT' è $f = d + c$, dove c è la distanza di O' da τ. La lunghezza del segmento AT è ancora $f = d + c$, perché O' dista d da π (il piano rosso, in figura), per costruzione, e c da τ, come sopra stabilito. Inoltre OT' e AT sono segmenti di rette parallele, perciò anche i segmenti AO' e TI' sono eguali e paralleli.

5. Cfr. Piergiorgio Odifreddi, *Le menzogne di Ulisse. L'avventura della logica da Parmenide a Amartya Sen*, Longanesi & C., Milano 2004.

6. Cfr. Ferdinando Aschieri, *Geometria Projettiva, Lezioni di F. A., Professore nella R. Università di Pavia*, Seconda Edizione, Hoepli, Milano 1888 e, segnatamente, i capitoli: *IX Quadriche nello spazio*, *X Omografia e reciprocità dello spazio* e *XI Costruzione di tutte le omografie dello spazio*.

1. Cfr. David F. Rogers, James Alan Adams, Mathematical elements for computer graphics, *Mc Graw-Hill, New York 1990. Specifically on p. 139: "[...] the effect of the projection is to neglect the z coordinate".*

2. For the geometric considerations and mathematical equations which lead to this result, see Riccardo Migliari, Ha la prospettiva un futuro?, *in* Ikhnos. Analisi grafica e storia della rappresentazione, *Siracusa 2005, pp. 11-28. The text is also available at http://www.migliari.it/pagine/ricerche_it.html.*

3. Guglielmo (Wilhelm) Fiedler, Trattato di Geometria Descrittiva, *translated by Antonio Sayno and Ernesto Padova, Successori Le Monnier, Florence 1874. The title of the charter that ends the treatise on perspective amply illustrates Fiedler's novel concept which is even more topical today:* Homology of solid systems considered as the theory of the methods of the art of modelling. *It's strange to note how the verb to model, which then becomes "modelling" is the word normally used to distinguish between graphic and computerised representation. Fiedler's vision helps us believe in our idea that a more general concept of projection and section, such as the one briefly described in this article, is at the basis of the revival of descriptive geometry and the mainstreaming and inclusion of digital techniques of representation of space.*

4. The length of the segment O'I' *is* f = d + c, *where* c *is the distance of* O' *from* τ. *The length of the segment* AT *is still* f = d + c, *because* O' *is at distance* d *from* π *(the red plane, in the figure), as shown by the construction, and* c *from* τ, *as established earlier. Furthermore* O'I' *and* AT *are segment of parallel straight lines, i.e., also the segments* AO' *and* TI' *are equal and parallel.*

5. Cfr. Piergiorgio Odifreddi, Le menzogne di Ulisse. L'avventura della logica da Parmenide a Amartya Sen, *Longanesi & C., Milan 2004.*

6. Cfr. Ferdinando Aschieri, Geometria Projettiva, Lezioni di F. A., Professore nella R. Università di Pavia, *Second Edition, Hoepli, Milan 1888 and, specifically, chapters:* IX Quadriche nello spazio, X Omografia e reciprocità dello spazio and XI Costruzione di tutte le omografie dello spazio.