STATI COERENTI DELL' OSCILLATORE ARMONICO

Prerequisiti:

$$H = \frac{p^2}{2m} + \frac{1}{2} m\omega^2 q^2 = \left(\frac{1}{2} + \eta^+\eta\right)\hbar\omega \qquad (1)$$

$$\begin{cases} \hat{q} = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}\, q \\ \hat{p} = \frac{1}{\sqrt{m\omega\hbar}}\, p \end{cases} \quad (2) \qquad \eta = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{p} - i\hat{q}) \quad (3) \qquad \left[a = \frac{1}{\sqrt{2}}(\hat{q} + i\hat{p}) = i\eta\right]$$

$$|n\rangle = \frac{1}{\sqrt{n!}}(\eta^+)^n |0\rangle \qquad H|n\rangle = E_n|n\rangle \qquad E_n = \left(n + \frac{1}{2}\right)\hbar\omega \qquad (4)$$

$$[\eta, \eta^+] = 1 \qquad [\eta, (\eta^+)^n] = n(\eta^+)^{(n-1)} \qquad (5)$$

Costruzione formule degli autostati di η

- η^+ non ha autovettori con $\lambda \neq 0$

$$\eta^+|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle \qquad |\lambda\rangle = \sum_n a_n |n\rangle = \sum_n a_n \frac{1}{\sqrt{n!}} \eta^{+n}|0\rangle = \sum_n b_n \eta^{+n}|0\rangle$$

$$\begin{cases} \eta^+|\lambda\rangle = \sum_n b_n (\eta^+)^{n+1}|0\rangle = b_0 \eta^+|0\rangle + b_1 \eta^{+2}|0\rangle + \dots \\ \lambda|\lambda\rangle = \sum_n b_n \lambda \eta^{+n}|0\rangle = b_0 \lambda|0\rangle + b_1 \lambda \eta^+|0\rangle + \dots \end{cases}$$

$\Rightarrow \quad \lambda b_0 = 0 \qquad b_0 = 0 \quad (\text{se } \lambda \neq 0)$

$\lambda b_1 = b_0 \qquad b_1 = 0$

$\dots \qquad \dots \qquad b_n = 0$

- η ha autovettori per $\forall \lambda \in \mathbb{C}$

$$\eta|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle$$

$$\eta|\lambda\rangle = \sum_n b_n \eta\eta^{+n}|0\rangle$$

$$\eta\eta^{+n} = \eta\eta^{+n} - \eta^{+n}\eta + \eta^{+n}\eta = [\eta, \eta^{+n}] + \eta^{+n}\eta = n\eta^{+(n-1)} + \eta^{+n}\eta$$

$$\eta\eta^{+n}|0\rangle = n\,\eta^{+n-1}|0\rangle$$

$$\eta|\lambda\rangle = \sum_n b_n n(\eta^+)^{(n-1)}|0\rangle = b_1|0\rangle + b_2 2\eta^+|0\rangle + b_3 3\eta^{+2}|0\rangle + \dots$$

$$\lambda|\lambda\rangle = \sum_n b_n \lambda\eta^{+n}|0\rangle = \lambda b_0|0\rangle + \lambda b_1 \eta^+|0\rangle + \lambda b_2 \eta^{+2}|0\rangle + \dots$$

$\lambda b_0 = b_1 \qquad b_1 = b_0\lambda$

$\lambda b_1 = 2b_2 \qquad b_2 = \frac{1}{2}\lambda^2 b_0 \qquad\qquad b_n = \frac{1}{n!}\lambda^n b_0$

$\lambda b_2 = 3b_3 \qquad b_2 = \frac{1}{3\cdot 2}\lambda^3 b_0$

$$|\lambda\rangle = \sum_n b_0 \frac{\lambda^n}{n!}(\eta^+)^n |0\rangle = b_0 \sum_n \frac{(\lambda\eta^+)^n}{n!} |0\rangle = b_0\, e^{\lambda\eta^+} |0\rangle \qquad (6)$$

Normalizzazione

$$|\lambda\rangle = b_0 \sum_n \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

$$\langle\lambda|\lambda\rangle = |b_0|^2 \sum_{nm} \frac{\lambda^{*n}}{\sqrt{n!}} \frac{\lambda^m}{\sqrt{m!}} \overset{\delta_{nm}}{\langle n|m\rangle} = |b_0|^2 \sum_n \frac{|\lambda|^{2n}}{n!} = |b_0|^2 e^{|\lambda|^2} = 1$$

$$|\lambda\rangle = e^{-|\lambda|^2/2} e^{\lambda\eta^+} |0\rangle = e^{-\frac{|\lambda|^2}{2}} \sum_n \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle \qquad (7)$$

Calcolo di Δx e Δp su $|\lambda\rangle$

Dalle (2) e (3):

$$\hat{q} = \frac{i}{\sqrt{2}}(\eta - \eta^+) \qquad q = A\,i\,(\eta - \eta^+) \qquad A = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$$

$$(8) \qquad \hat{p} = \frac{1}{\sqrt{2}}(\eta + \eta^+) \qquad p = B\,(\eta + \eta^+) \qquad B = \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}$$

$$AB = \frac{\hbar}{2}$$

$$\Delta x_\lambda = \sqrt{\langle q^2\rangle_\lambda - \langle q\rangle_\lambda}$$

$$\Delta p_\lambda = \sqrt{\langle p^2\rangle_\lambda - \langle p\rangle_\lambda}$$

Uso le relazioni

$$\eta|\lambda\rangle = \lambda|\lambda\rangle \qquad \langle\lambda|\eta^+ = \langle\lambda|\lambda^* \qquad \lambda = \lambda' + i\lambda''$$

$$\eta^2|\lambda\rangle = \lambda^2|\lambda\rangle \qquad \langle\lambda|\eta^{+2} = \langle\lambda|\lambda^{*2} \qquad (9)$$

$$\langle\lambda|\eta^+\eta|\lambda\rangle = |\lambda|^2$$

$$\langle\lambda|\eta\eta^+|\lambda\rangle = \langle\lambda|[\eta,\eta^+] + \eta^+\eta|\lambda\rangle = 1 + |\lambda|^2$$

$$\langle q\rangle_\lambda = iA\langle\lambda|\eta - \eta^+|\lambda\rangle = iA(\lambda - \lambda^*) = -2A\lambda''$$

$$\langle p\rangle_\lambda = B\langle\lambda|\eta + \eta^+|\lambda\rangle = B(\lambda + \lambda^*) = 2B\lambda'$$

$$\langle q^2\rangle_\lambda = -A^2\langle\lambda|\eta^2 + \eta^{+2} - \eta\eta^+ - \eta^+\eta|\lambda\rangle = -A^2\left[\lambda^2 + \lambda^{*2} - 1 + \lambda\lambda^* - \lambda\lambda^*\right] =$$

$$= -A^2\left[(\lambda - \lambda^*)^2 - 1\right] = [\langle q\rangle_\lambda]^2 + A^2 \qquad \Rightarrow \quad \Delta x_\lambda = A$$

$$\langle p^2\rangle_\lambda = B^2\langle\lambda|\eta^2 + \eta^{+2} + \eta\eta^+ + \eta^+\eta|\lambda\rangle = B^2\left[(\lambda + \lambda^*)^2 + 1\right] =$$

$$= [\langle p\rangle_\lambda]^2 + B^2 \qquad \Rightarrow \quad \Delta p_\lambda = B$$

$$iA(\lambda-\lambda^*) = \langle q\rangle_\lambda = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\,\mathrm{Re}(\lambda) \qquad (10) \qquad \Delta x_\lambda = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} = A$$

$$B(\lambda+\lambda^*) = \langle p\rangle_\lambda = \sqrt{2m\omega\hbar}\;\mathrm{Im}(\lambda) \qquad (11) \qquad \Delta p_\lambda = \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}} = B$$

$$\Delta x_\lambda \cdot \Delta p_\lambda = \frac{\hbar}{2} \qquad (12)$$

Misura dell' energia e $\langle H\rangle$

Dalla (7) segue che

$$P_n(\lambda) = P(E=E_n, |\psi\rangle = |\lambda\rangle) = e^{-\frac{|\lambda|^2}{2}}\,\frac{|\lambda|^{2n}}{n!} \quad \to \text{Poisson distribution}$$

$$\langle H\rangle_\lambda = \hbar\omega\,\langle\lambda|\,\frac{1}{2}+\eta^+\eta\,|\lambda\rangle = \hbar\omega\left(\frac{1}{2}+|\lambda|^2\right)$$

To compute $\langle H^2\rangle$ let us notice that

$$\left(\frac{1}{2}+\eta^+\eta\right)^2 = \frac{1}{4}+\eta^+\eta+\eta^+\eta\,\eta^+\eta$$

$$\eta^+\eta\,\eta^+\eta = \eta^+[\eta,\eta^+]\eta + \eta^+\eta^+\eta\eta = \eta^+\eta + \eta^{+2}\eta^2$$

Dalle (8) quindi segue: $\left[\Delta H_\lambda = \sqrt{\langle H^2\rangle_\lambda - \langle H\rangle_\lambda^2}\right]$

$$\langle H^2\rangle_\lambda = (\hbar\omega)^2\,\langle\lambda|\,\frac{1}{4}+2\eta^+\eta+\eta^{+2}\eta^2\,|\lambda\rangle = (\hbar\omega)^2\left[\frac{1}{4}+2|\lambda|^2+|\lambda|^4\right]$$

$$\langle H^2\rangle_\lambda - \langle H\rangle_\lambda^2 = (\hbar\omega)^2\left[\frac{1}{4}+2|\lambda|^2+|\lambda|^4-\frac{1}{4}-|\lambda|^4-|\lambda|^2\right] = (\hbar\omega)^2|\lambda|^2$$

$$\Delta H_\lambda = \hbar\omega|\lambda| \qquad (13)$$

$$\langle H\rangle_\lambda = \hbar\omega\left(\frac{1}{2}+|\lambda|^2\right) \qquad (14)$$

Di conseguenza quando $|\lambda|\gg 1$ abbiamo che il valore relativo dell' energia in uno stato $|\lambda\rangle$ è ben definito in quanto

$$\frac{\Delta H_\lambda}{\langle H\rangle_\lambda} \simeq \frac{1}{|\lambda|} \ll 1 \qquad |\lambda|\gg 1 \qquad (15)$$

Stati coerenti in rappresentazione di Schroedinger

Partiamo dal risultato (7) e dimostriamo che dato l'operatore

$$D(\lambda) = e^{\lambda\eta^+ - \lambda^*\eta} \qquad (16)$$

posso scrivere il generico stato $|\lambda\rangle$ come

$$|\lambda\rangle = D(\lambda)\,|0\rangle \qquad (17)$$

con $|0\rangle = |n=0\rangle$ stato fondamentale dell'oscillatore armonico.

Usiamo la proprietà che se due operatori F e G commutano con il loro commutatore allora vale:

$$e^F e^G = e^{F+G}\, e^{\frac{1}{2}[F,G]} \qquad e^{F+G} = e^F e^G e^{-\frac{1}{2}[F,G]} \qquad (18)$$

Se quindi $A = \lambda\eta^+$ e $B = -\lambda^*\eta$ allora
$[A,B] = -|\lambda|^2[\eta^+,\eta] = |\lambda|^2$ per cui
$$D(\lambda) = e^{\lambda\eta^+} e^{-\lambda^*\eta} e^{-|\lambda|^2/2}$$

Inoltre poiché $|\lambda=0\rangle$ coincide con $|n=0\rangle$ visto che $\eta|n=0\rangle = 0$ abbiamo che
$$e^{-\lambda^*\eta}|0\rangle = |0\rangle$$ per cui ritroviamo che
$$D(\lambda)|0\rangle = e^{-|\lambda|^2/2} e^{\lambda\eta^+}|0\rangle \underset{(7)}{=} |\lambda\rangle$$

La (17) ci consente di ricavare facilmente l'espressione di $\psi_\lambda(x)$ in rappresentazione di Schroedinger:
$$\psi_\lambda(x) = \langle x|\lambda\rangle$$

Possiamo infatti esprimere

$$\lambda\eta^+ - \lambda^*\eta = \frac{\lambda}{\sqrt{2}}[\hat{p}+i\hat{q}] - \frac{\lambda^*}{\sqrt{2}}[\hat{p}-i\hat{q}] = \frac{\lambda-\lambda^*}{\sqrt{2}}\hat{p} + i\frac{\lambda+\lambda^*}{\sqrt{2}}q =$$
$$= (\lambda-\lambda^*)\frac{A}{\hbar}p + i(\lambda+\lambda^*)\frac{B}{\hbar}q = \qquad (A \text{ e } B \text{ dalle } (8))$$
$$= -i\frac{\langle q\rangle_\lambda}{\hbar}p + i\frac{\langle p\rangle_\lambda}{\hbar}q$$

A questo punto usando nuovamente la (18) abbiamo:

$$\left[i\frac{\langle p\rangle_\lambda q}{\hbar}, -i\frac{\langle q\rangle_\lambda p}{\hbar}\right] = \frac{\langle p\rangle_\lambda\langle q\rangle_\lambda}{\hbar^2}[q,p] = \frac{i}{\hbar}\langle p\rangle_\lambda\langle q\rangle_\lambda =$$

$$= \frac{i}{\hbar} B(\lambda+\lambda^*)\, iA(\lambda-\lambda^*) = -\frac{1}{2}(\lambda^2-\lambda^{*2})$$

$$D(\lambda) = e^{i\vartheta_\lambda}\, e^{i\frac{\langle p\rangle_\lambda q}{\hbar}}\, e^{-i\frac{\langle q\rangle_\lambda p}{\hbar}} \qquad i\vartheta_\lambda = (\lambda^{*2}-\lambda^2)/4 \qquad (19)$$

Usando quindi l'azione degli operatori e^{iaq} e e^{ibp} sugli stati x:

$$\langle x| e^{iaq/\hbar} = \langle x| e^{iax/\hbar}$$
$$\qquad (20)$$
$$\langle x| e^{ibp/\hbar} = \langle x+b|$$

otteniamo

$$\psi_\lambda(x) = \langle x|\lambda\rangle = \langle x| D(\lambda)|0\rangle = \langle x| e^{i\vartheta_\lambda} e^{i\frac{\langle p\rangle_\lambda q}{\hbar}} e^{-i\frac{\langle q\rangle_\lambda p}{\hbar}} |0\rangle$$
$$= e^{i\vartheta_\lambda} e^{i\langle p\rangle_\lambda x/\hbar} \langle x| e^{-i\langle q\rangle_\lambda p/\hbar} |0\rangle =$$
$$= e^{i\vartheta_\lambda} e^{i\langle p\rangle_\lambda x/\hbar} \langle x-\langle q\rangle_\lambda |0\rangle =$$
$$= e^{i\vartheta_\lambda} e^{i\langle p\rangle_\lambda x/\hbar}\, \psi_0(x-\langle q\rangle_\lambda) \qquad (21)$$

dove $\psi_0(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\frac{1}{2}\frac{m\omega x^2}{\hbar}}$

Di conseguenza $\psi_\lambda(x)$ può essere ottenuto a partire dallo stato fondamentale dell'oscillatore armonico tramite una traslazione della funzione della quantità $\langle q\rangle_\lambda$ e moltiplicandola per un fattore oscillante $e^{i\langle p\rangle_\lambda x/\hbar}$.

Utilizzando anche l'espressione calcolata in precedenza di Δx, cioè $\Delta x_\lambda = A = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}$ notiamo che la (21) può essere scritta:

$$\frac{1}{2} m\omega \frac{x^2}{\hbar} = \frac{1}{4}\frac{2m\omega}{\hbar} x^2 = \frac{1}{4}\frac{x^2}{\Delta x_\lambda^2}$$

per cui:

$$\psi_\lambda(x) = \left(\frac{m\omega}{\pi\hbar}\right)^{1/4} e^{-\left[\frac{x-\bar{x}_\lambda}{2\Delta x_\lambda}\right]^2 + i\frac{\bar{p}_\lambda x}{\hbar}} \qquad (22)$$

per cui la densità di probabilità è un pacchetto d'onda gaussiano

$$|\psi_\lambda(x)|^2 = \sqrt{\frac{m\omega}{\pi\hbar}}\, e^{-\frac{1}{2}\left[\frac{x-\bar{x}_\lambda}{\Delta x_\lambda}\right]^2} \qquad (23)$$

Evoluzione temporale degli stati coerenti

Dalla (7) è immediato calcolare come evolve nel tempo uno stato $|\psi_\lambda\rangle$ che coincide a $t=0$ con un autostato di η. Usando infatti l'espressione esplicita (4) dei livelli energetici E_n degli stati $|n\rangle$ si ha:

$$|\psi_\lambda(t=0)\rangle = |\lambda\rangle = e^{-|\lambda|^2/2} \sum_n \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle$$

$$|\psi_\lambda(t)\rangle = e^{-|\lambda|^2/2} \sum_n \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}} e^{-iE_n t/\hbar} |n\rangle = e^{-|\lambda|^2/2} \sum_n \frac{\lambda^n}{\sqrt{n!}} e^{-i\omega t(n+\frac{1}{2})} |n\rangle =$$

$$= e^{-i\omega t/2} e^{-|\lambda|^2/2} \sum_n \frac{(\lambda e^{-i\omega t})^n}{\sqrt{n!}} |n\rangle = |\lambda e^{-i\omega t}\rangle = |\lambda(t)\rangle \qquad (24)$$

dove si è indicato con $|\lambda(t)\rangle$ l'autostato di η con autovalore $\lambda e^{-i\omega t}$

$\Rightarrow$ $|\psi_\lambda(t)\rangle$ rimane autostato di η con autovalore $\lambda_0 e^{-i\omega t}$ dove λ_0 è il valore dell'autostato a $t=0$

La proprietà (24) ci consente di descrivere in modo semplice l'evoluzione temporale dei valori medi degli operatori posizione ed impulso. Infatti valendo la (10)-(11) per $\forall\lambda$ se ne deduce che:

$$\langle q\rangle_\lambda(t) = \langle\psi_\lambda(t)|q|\psi_\lambda(t)\rangle = iA(\lambda(t) - \lambda^*(t)) = -2A\,\mathrm{Re}(\lambda_0 e^{-i\omega t}) \qquad (25)$$

$$\langle p\rangle_\lambda(t) = \langle\psi_\lambda(t)|p|\psi_\lambda(t)\rangle = B(\lambda(t) + \lambda^*(t)) = 2B\,\mathrm{Im}(\lambda_0 e^{-i\omega t}) \qquad (26)$$

Inoltre poiché $|\lambda(t)| = |\lambda(t=0)| = |\lambda_0|^2$ il valor medio dell'energia è una costante

$$\begin{cases} \langle H\rangle_\lambda(t) = \langle\psi_\lambda(t)|H|\psi_\lambda(t)\rangle = \hbar\omega(\frac{1}{2} + |\lambda_0|^2) \\ \langle\Delta H\rangle_\lambda(t) = \hbar\omega|\lambda_0| \end{cases} \qquad (27)$$

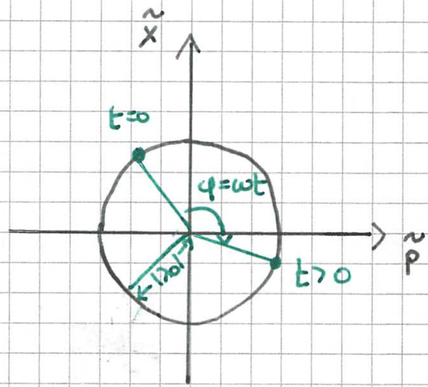
Queste relazioni ci consentono di porre in corrispondenza i valori medi degli osservabili q, p, H con le corrispettive variabili del moto classico.

Riportiamo quindi delle equazioni del moto classiche per un oscillatore armonico unidimensionale di massa m e frequenza angolare ω; introducendo la costante

$\beta = \sqrt{\frac{m\omega}{\hbar}}$

e le variabili riscalate $\tilde{x} = \beta x$ e $\tilde{p} = \frac{p}{\hbar\beta}$ abbiamo:

$$\begin{cases}\dfrac{dx}{dt} = \dfrac{1}{m}p \\[2mm] \dfrac{dp}{dt} = -m\omega^2 x\end{cases} \Rightarrow \begin{cases}\dfrac{d\tilde{x}}{dt} = \omega\tilde{p} \\[2mm] \dfrac{d\tilde{p}}{dt} = -\omega\tilde{x}\end{cases} \qquad E = \frac{1}{2}\hbar\omega\left[\tilde{p}^2+\tilde{x}^2\right] \qquad (28)$$



Introducendo la definizione:

$$\lambda(t) = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tilde{p}(t) - i\,\tilde{x}(t)\right) \qquad (29)$$

la sua equazione del moto è:

$$\frac{d\lambda}{dt} = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(-\omega\tilde{x} - i\omega\tilde{p}\right) = -\frac{i\omega}{\sqrt{2}}\left(\tilde{p} - i\tilde{x}\right) = -i\omega\lambda$$

la cui soluzione è

$$\lambda(t) = \lambda_0 e^{-i\omega t} \qquad \lambda_0 = \frac{1}{\sqrt{2}}\left(\tilde{p}(t=0) - i\,\tilde{x}(t=0)\right) \qquad (30)$$

Pertanto il moto classico è perfettamente determinato dalle condizioni iniziali (che fissano λ_0) e può essere descritto da un vettore $\lambda(t)$ nel piano complesso (p, ix) il cui modulo $|\lambda(t)| = |\lambda_0|$ rimane costante, ed il cerchio di raggio $|\lambda_0|$ viene percorso in senso antiorario al variare di t. I valori di x e p ad un generico istante t si ottengono invertendo la (29) e sono:

$$x(t) = \frac{1}{\beta}\tilde{x}(t) = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}}\; i\left(\lambda(t) - \lambda^*(t)\right) = -2A\,\mathrm{Re}\left(\lambda_0 e^{-i\omega t}\right) \qquad (31)$$

$$p(t) = \hbar\beta\,\tilde{p}(t) = \sqrt{\frac{m\omega\hbar}{2}}\left(\lambda(t) + \lambda^*(t)\right) = 2B\,\mathrm{Im}\left(\lambda_0 e^{-i\omega t}\right) \qquad (32)$$

$$E = \frac{1}{2}\hbar\omega\,|\lambda_0|^2 \qquad (33)$$

Dal confronto tra le (31)-(33) e le (25)-(27) si vede che in sostanza gli stati coerenti o "quasi classici" rappresentano una particolare combinazione lineare degli autostati dell'oscillatore armonico che consente di ottenere delle predizioni fisiche quasi identiche a quelle classiche. Poiché in meccanica quantistica le predizioni fisiche sono connesse a valori medi degli operatori ha senso confrontare le (31)-(33) con i valori medi (25)-(27) precedentemente calcolati. Troviamo quindi che:

$$\begin{cases}\langle q\rangle_\lambda(t) = x_{classico}(t) \\[2mm] \langle p\rangle_\lambda(t) = p_{classico}(t)\end{cases} \qquad \text{se } |\psi(t=0)\rangle = |\lambda_0\rangle \qquad (34)$$

Osserviamo anche che la proprietà (22) ci consente anche di concludere che $|\psi_\lambda(x,t)|^2$ rimane sempre un pacchetto gaussiano, centrato in una posizione $\bar{x}_\lambda(t)$ che varia nel tempo esattamente come fa la variabile classica $x(t)$, grazie alla relazione (34)

Quanto è "ben definito" il pacchetto d'onda $|\psi_\lambda(x,t)|^2$? Quello che dobbiamo confrontare è Δx_λ con $\bar{x}_\lambda$. Usando le (10)-(12) e le espressioni (25)-(26) notiamo che

$$\frac{\Delta x_\lambda}{\bar{x}_\lambda} = \frac{A}{-2A\,\mathrm{Im}(\lambda(t))} \qquad \frac{\Delta p_\lambda}{\bar{p}_\lambda} = \frac{B}{-2B\,\mathrm{Re}(\lambda(t))}$$

Pertanto se $|\lambda_0| \gg 1$ abbiamo che $\frac{\Delta x_\lambda}{\bar{x}_\lambda}, \frac{\Delta p_\lambda}{\bar{p}_\lambda} \to 0$, cioè la posizione e l'impulso divengono ben definiti.
Per $|\lambda_0| \gg 1$ anche l'energia (14) coincide sostanzialmente con il suo valore classico (33) e diviene anch'esso ben definito:

$$\frac{\Delta H_\lambda}{\langle H \rangle_\lambda} \simeq \frac{1}{|\lambda_0|} \to 0 \qquad |\lambda_0| \gg 1$$

Quanto vale effettivamente il parametro λ_0 per un oscillatore armonico macroscopico, per il quale ci aspettiamo un comportamento classico? Prendiamo un caso concreto: un corpo di massa $m = 1$ kg sospeso ad una fune di $l = 0,1$ m che compie piccole oscillazioni. Il periodo è dato da

$T = 2\pi\sqrt{\frac{l}{g}} \simeq 0,63$ s ($g \simeq 10\ \mathrm{m/s^2}$ accelerazione di gravità)

$\omega = 1/T = 10\ s^{-1}$

Per oscillazioni di un'ampiezza massima di $x_M = 1$ cm possiamo stimare $|\lambda_0|$ dalla (31) come:

$$x_M = 2A|\lambda_0| = \sqrt{\frac{2\hbar}{m\omega}}\,|\lambda_0|$$

$$|\lambda_0| \simeq \sqrt{5}\cdot 10^{15} = 2,2\cdot 10^{15}$$

Pertanto uno stato coerente quantistico che riproduca questo moto classico ha un λ_0 iniziale talmente grande che l'indeterminazione quantistica con la quale posizione e impulso sono noti è certamente trascurabile rispetto alle quantità coinvolte nel problema. Ad esempio dalla (10):

$$\Delta x = \sqrt{\frac{\hbar}{2m\omega}} = \sqrt{5}\cdot 10^{-18}\ m \qquad \frac{\Delta x}{x_M} = 2,2\cdot 10^{-16}$$

 Riferimenti bibliografici: Cohen-Tannoudji et al. Quantum Mechanics, Vol. I, § G5