Programma di Analisi Funzionale

A.A. 2018-2019, Prof. A. Dall'Aglio

- **Spazi metrici.** Convergenza negli spazi metrici. Topologia e limiti negli spazi metrici. Funzioni continue tra spazi metrici. Spazi metrici completi. **Spazi normati. Spazi di Banach.** Esempi: spazi di successioni l^p, spazi L^p, spazi di funzioni continue, spazio C^1, C^k. Teorema di passaggio al limite di Vitali. Spazio delle successioni convergenti, spazio delle successioni infinitesime, spazio delle successioni definitivamente nulle. Un sottospazio chiuso di spazi di Banach è di Banach.
- **Operatori lineari e continui tra spazi normati.** Norma di un operatore lineare e continuo. Spazio L(X,Y). Esempi. **Teorema di Hahn-Banach** (forme analitiche e geometriche) e sue conseguenze. Isomorfismi e isometrie tra spazi normati. Norme equivalenti. Spazi di dimensione finita. **Spazio duale. Spazio biduale.** Iniezione canionica di X in X^{**}. **Spazi riflessivi.** Esempi. Iperpiani chiusi. Funzionale di Minkowski.
- **Teorema di Baire** e applicazioni. **Teorema di Banach-Steinhaus** (principio di uniforme limitatezza) e applicazioni. **Teorema dell'applicazione aperta** e applicazioni. **Teorema del grafico chiuso** e applicazioni.
- Topologia generata da una famiglia di insiemi. Topologia meno fine che rende continua una famiglia di funzioni. **Topologia debole** in uno spazio normato. Sistemi fondamentali di intorni della topologia debole. **Convergenza debole** e sue proprietà. Confronto tra topologia debole e topologia forte. Convessità e chiusura debole. Esempi di successioni debolmente convergenti. Convergenza debole in l^1 (Teorema di Schur). Convergenza debole in l^p e in L^p. Esempi. Funzionali semicontinui. Convessità e semicontinuità debole. Continuità debole e forte di operatori tra spazi di Banach. **Topologia "star-debole"** e sue proprietà. **Convergenza "star-debole"**. **Teorema di Banach-Alaoglu. Spazi separabili.** Separabilità e metrizzabilità della topologia star-debole su B^*. Conseguenze per la convergenza star-debole. Compattezza debole delle successioni limitate in L^p. Separabilità e riflessività di X e di X^*. Teorema di Kakutani (criterio per la riflessività). **Compattezza sequenziale debole degli spazi riflessivi.** Riflessività e separabilità dei principali spazi funzionali.
- **Teorema di Ascoli-Arzelà** e applicazioni. Criterio di compattezza forte in L^p (**Teorema di Kolmogorov-Riesz-Frechet**). Cenni alle convoluzioni e regolarizzazione tramite mollificatori.

- Ripasso degli **spazi di Sobolev**. Teorema di densità. Teorema di prolungamento. Esempi di funzioni appartenenti agli spazi di Sobolev. Separabilità e riflessività degli spazi di Sobolev. Immersioni degli spazi di Sobolev (**teoremi di Sobolev-Gagliardo-Nirenberg, Morrey**, Trudinger). **Disuguaglianza di Sobolev. Spazio $W^{1,p}_0$.** Disuguaglianza di Poincaré. Duale di $W^{1,p}_0$ e di $W^{1,p}$. Successioni debolmente convergenti in $W^{1,p}$. Immersioni compatte. Esempi di immersioni compatte. **Teorema di Rellich-Kondrachov.** In generale operatori nonlineari "distruggono" la convergenza debole. Gli operatori di troncatura in W^1,p conservano la convergenza debole.
- **Spazi uniformemente convessi.** Esempi. Riflessività degli spazi uniformemente convessi (s.d). Negli spazi uniformemente convessi convergenza debole + convergenza delle norme = convergenza forte.
- Spazi dotati di prodotto scalare, **spazi di Hilbert**. Disuguaglianza di Cauchy-Schwarz. Esempi. Identità del parallelogramma. Uno spazio di Hilbert è uniformemente convesso. Rappresentazione del duale di uno spazio di Hilbert. Proprietà di minima norma in un convesso chiuso. **Proiezione su un convesso chiuso.** Forme bilineari continue, coercitive, simmetriche. **Teorema di Lax-Milgram. Teorema di Stampacchia.**
- **Uniforme equi-integrabilità** e **Teorema di Dunford-Pettis** sulla convergenza debole L^1. Teorema di Lebesgue-Vitali.
- **Formulazione debole di problemi alle derivate parziali.** Problema di Dirichlet (omogeneo e non omogeneo) per l'equazione di Poisson. Relazione tra problemi al contorno e minimi di funzionali (Principio di Dirichlet). Cenni alla regolarità di soluzioni deboli. Problema di Dirichlet omogeneo per operatori in forma di divergenza a coefficienti misurabili. Problema di Neumann per l'equazione di Poisson.
- Duale di C(Ω-). **Misure di Radon**. Immersione di $L^1(\Omega)$ in M(Ω-). Separabilità di C(Ω-). Convergenza star-debole in M(Ω-). Ogni successione limitata in $L^1(\Omega)$ ammette una sottosuccessione star-debolmente convergente in M(Ω-). Teorema di Dunford-Pettis.

Libri di testo consigliati:

- **H. Brezis:** Functional Analysis, Sobolev Spaces and Partial Differential Equations. Springer
- **S. Kesavan:** Functional Analysis

Nota: questo programma sintetico è un riassunto del programma dettagliato, che consiste negli appunti delle lezioni, disponibili sulla pagina web del corso. Alcuni teoremi sono stati dimostrati (in tal caso la dimostrazione fa parte del programma di esame), altri no. Anche a tale proposito fanno fede gli appunti delle lezioni.