Misure di Radon

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ aperto limitato.

Consideriamo $C(\overline{\Omega})$ con la norma

$$\|f\|_\infty = \sup_{x \in \overline{\Omega}} |f(x)| = \max_{x \in \overline{\Omega}} |f(x)|$$

- $C(\overline{\Omega})$ è uno sp. di Banach

Lo spazio duale di $C(\overline{\Omega})$ si indica con $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$ e si chiama spazio delle misure di Radon su $\overline{\Omega}$

$$\mu \in \mathcal{M}(\overline{\Omega}) \Rightarrow \|\mu\|_{\mathcal{M}(\overline{\Omega})} = \sup_{\substack{f \in C(\overline{\Omega}) \\ \|f\|_\infty \leq 1}} \mu(f)$$

TEOREMA $C(\overline{\Omega})$ è separabile

Dim dopo (questo è vero anche per $C(K)$ con K sp. metrico compatto)

OSS se $u \in L^1(\Omega)$. Allora u definisce una $\mu_u \in \mathcal{M}(\overline{\Omega})$ nel seguente modo

$$\langle \mu_u, f \rangle = \int_\Omega u(x) f(x) dx$$

Ovviamente μ_u è lineare e continuo

$$|\langle \mu_u, f\rangle| = \left|\int_\Omega u\, f\, dx\right| \le \|u\|_{L^1} \|f\|_\infty$$

$$\|\mu_u\|_{\mathcal{M}(\bar\Omega)} \le \|u\|_{L^1(\Omega)}$$

In realtà vale l'uguaglianza: $\|\mu_u\|_{\mathcal{M}(\bar\Omega)} = \|u\|_{L^1(\Omega)}$

Per dim. la disuguaglianza opposta, osserviamo che

$$\|u\|_{L^1(\Omega)} = \overset{\max}{\cancel{\sup}}_{\substack{f\in L^\infty \\ \|f\|_\infty \le 1}} \int_\Omega f\, u\, dx$$

Sia dunque $f \in L^\infty(\Omega)$ t.c. $|f(x)| \le 1$ q.o.

e $\|u\|_{L^1} = \int_\Omega u\, f\, dx$ (deve essere $f(x) = \text{sign}\, u(x)$)

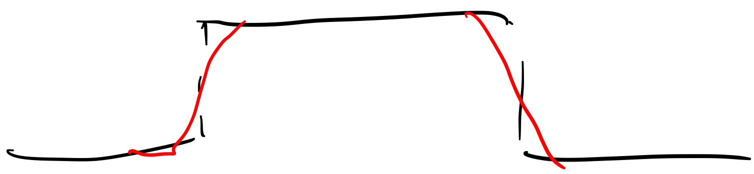
Affermo che $\exists$ una φ_n succ^{ne} di funz. continue in $\bar\Omega$ t.c. $\varphi_n \longrightarrow f$ q.o. $\|\varphi_n\|_\infty \le 1$.

Sketch della dim.

1) approssimo f con funzioni semplici del tipo
$$\sum_{i=1}^{m} \lambda_i \chi_{E_i}$$
E_i insiemi misurabili

2) approssimo ciascun E_i con unioni finite di rettangoli
$$\sum_{i=1}^{m'} \mu_i \chi_{Q_i}$$

3) smusso le funzioni caratteristiche dei rettangoli



In questo modo costruisco le $\varphi_n \to f$ q.o.

$\|\varphi_n\| \leq 1$. $\Rightarrow$ $\displaystyle\int u\varphi_n \xrightarrow[n]{} \int u f$

per conv. dominata $|u\varphi_n| \leq |u| \in L^1$

$$\|u\|_{L^1} = \int u f = \lim_n \int u \varphi_n =$$

$$= \lim_n \langle \mu_u, \varphi_n \rangle \leq \|\mu_u\|$$

L'applicazione $u \longmapsto \mu_u$ è un'isometria

$L^1(\Omega) \longrightarrow \mathcal{M}(\bar{\Omega})$

$\Rightarrow$ Posso identificare $L^1(\Omega)$ con un sottospazio <u>chiuso</u> di $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$

<u>TEOREMA</u> Sia $\{u_n\}$ limitata in $L^1(\Omega)$

Allora $\exists$ una sottosucc^{ne} $\{u_{n_k}\}$ t.c.

$$u_{n_k} \xrightarrow{*} \mu \qquad * \text{- debole in } \mathcal{M}(\overline{\Omega})$$

per una qualche μ.

<u>Dim</u> Segue da Banach-Alaoglu

+ separabilità di $C(\overline{\Omega})$

La palla unitaria di $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$ è $*$-deb compatta e $*$-deb. metrizzabile $\Longrightarrow$

$\exists$ sottosucc^{ne} $*$-deb. convergente

Dim. alternativa di Dunford-Pettis

Se $\{f_n\}$ è una succ^{ne} limitata in $L^1(\Omega)$ e uniformemente equi-integrabile, allora $\exists$ una sottosucc^{ne} deb. convergente in $L^1(\Omega)$

Dim Per il teorema precedente possiamo supporre che $f_n \xrightarrow{*} \mu$ in $\mathcal{M}(\overline{\Omega})$

Devo provare:
1) $\mu \in L^1(\Omega)$
2) la convergenza è in realtà in L^1 debole

1) Considero $M>0$. Allora $\|T_M(f_n)\|_\infty \leq M$.

Quindi posso estrarre una sottosucc^{ne} t.c.

$$T_M(f_{n_k}) \xrightarrow{*} g_M \qquad L^\infty(\Omega) \text{ } *\text{-debole}$$

OSS $*$-debole L^∞ implica debole L^1.

D'altra parte per l'equintegrabilità posso scegliere M grande in modo che

$$\|f_n - T_M f_n\|_{L^1} \leq \int_{|f_n|>M} |f_n| < \varepsilon \qquad \forall n$$

Sappiamo che

$$f_{n_k} \xrightarrow{*} \mu \qquad \mathcal{M}(\overline{\Omega})$$

$$T_M f_{n_k} \xrightarrow{*} g_M \qquad \mathcal{M}(\overline{\Omega})$$

$$\Rightarrow \quad f_{n_k} - T_M f_{n_k} \xrightarrow{*} \mu - g_M \qquad \mathcal{M}(\overline{\Omega})$$

$$\Rightarrow \quad \| \mu - g_M \|_{\mathcal{M}(\overline{\Omega})} \le \liminf_{k} \| f_{n_k} - T_M f_{n_k} \|_{\cancel{\mathcal{M}(\overline{\Omega})}\ L^1(\Omega)} \le \varepsilon$$

$$\Rightarrow \quad \mu \in \overline{L^\infty(\Omega)}^{\mathcal{M}(\overline{\Omega})} \subset \overline{L^1(\Omega)} = L^1(\Omega)$$

Chiamo $\mu = f \in L^1(\Omega)$

2) Devo controllare che $f_n \rightharpoonup f$ debole $L^1(\Omega)$

cioè $\int_\Omega (f_n - f)\, v \longrightarrow 0 \quad \forall v \in L^\infty(\Omega)$

Posso approssimare come prima v con una succ^{ne} $\{v_m\}$ di funzioni $C(\bar\Omega)$ t.c

$v_m \longrightarrow v$ q.o.

$\|v_m\|_\infty \le \|v\|_\infty$

Inoltre vale Egorov: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists E \subset \bar\Omega$ con $|E| < \varepsilon$ t.c. $v_m \to v$ unif^{te} in $\bar\Omega \setminus E$

<u>OSS</u> $f_n - f$ equi-integrabili

$$\left|\int_\Omega (f_n - f)\, v\, dx\right| \le \underbrace{\int_\Omega |f_n - f|\,|v - v_m|}_{\wedge|} + \left|\int_\Omega (f_n - f)\, v_m\right|$$

$$\underbrace{\int_E |f_n - f|\,|v - v_m|}_{\wedge|} + \underbrace{\int_{\Omega\setminus E} |f_n - f|\,|v - v_m|}_{\wedge} < \varepsilon/3 \text{ se } m \text{ grande}$$

3) Fissato m questo tende a zero per $n \to +\infty$

1) $\underbrace{2\|v\|_\infty \int_E |f_n - f|}_{< \varepsilon/3}$ se $|E|$ piccolo

2) $\underbrace{\|v - v_m\|_{L^\infty(\Omega\setminus E)}}_{\to 0}\ \underbrace{\|f_n - f\|_{L^1}}_{\le C}$

Dim che $C(\overline{\Omega})$ è separabile.

Step 1. Partizione dell'unità.

$\forall \delta > 0$, voglio trovare un ricoprimento finito di $\overline{\Omega}$ con palle $B(a_j, \delta)$ $j = 1 \dots m$

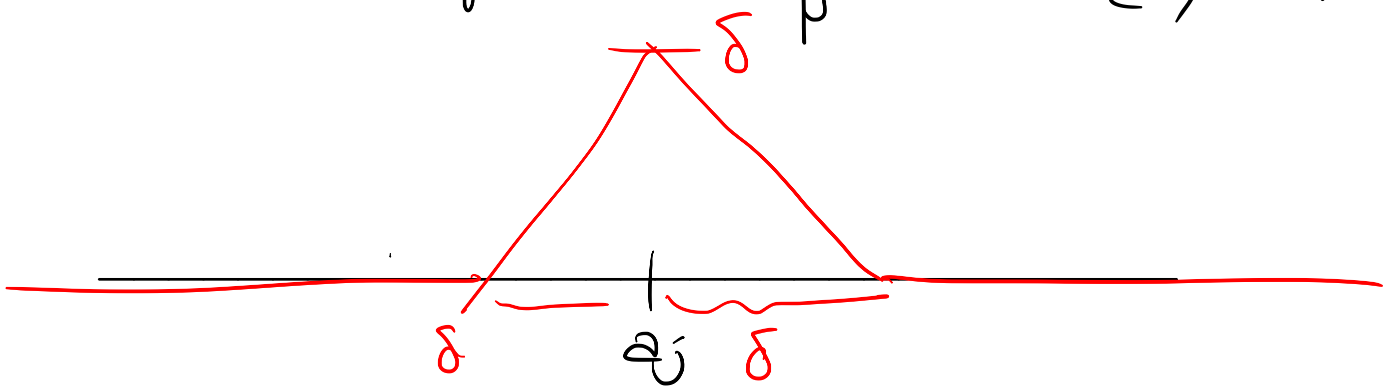
e delle funzioni $\theta_j(x) \in C(\overline{\Omega})$ t.c

$$\operatorname{supp} \theta_j \subset \overline{B(a_j, \delta)}, \quad 0 \leq \theta_j(x) \leq 1.$$

$$\sum_{j=1}^{m} \theta_j(x) = 1 \qquad \forall x \in \overline{\Omega}.$$

Per far questo ricopro $\overline{\Omega}$ con un numero finito di palle di raggio $\frac{\delta}{2}$ $B\left(a_j, \frac{\delta}{2}\right)$.

Poi considero la funzione $q_j(x) = \max\{0, \delta - |x - a_j|\}$



$$\operatorname{supp} q_j \subset \overline{B(a_j, \delta)}$$

Poi prendo $q(x) = \sum_{j=1}^{m} q_j(x)$

oss che $q(x) \geq \frac{\delta}{2}$ (x dista meno di $\delta/2$ da uno degli a_j)

Considero ora $\theta_j(x) = \dfrac{q_j(x)}{q(x)}$

$$\operatorname{supp} \theta_j \subset \overline{B(a_j, \delta)}$$

$$\sum_{j=1}^{m} \theta_j(x) = 1$$

Step 2 Sia $f \in C(\overline{\Omega})$, e sia $\varepsilon > 0$

Sia $\delta > 0$ il modulo di continuità uniforme relativo a f e a ε.

$$|x-y| < \delta \implies |f(x) - f(y)| < \varepsilon$$

Considero la partiz. dell'unità relativa a δ.

$$B(a_j, \delta) \qquad j = 1 \dots m$$

$$\theta_j \in C(\overline{\Omega})$$

$$\tilde{f}(x) = \sum_{j=1}^{m} f(a_j)\, \theta_j(x)$$

$$|\underbrace{f(x)}_{\substack{\shortparallel \\ \sum_{j=1}^{m} f(x)\theta_j(x)}} - \tilde{f}(x)| \leq \sum_{j=1}^{m} \underbrace{|f(x) - f(a_j)|\, \theta_j(x)}_{\substack{\wedge\!| \\ \varepsilon\, \theta_j(x)}} \leq \varepsilon$$

Step 3 Costruzione dell'insieme numerabile denso in $C(\overline{\Omega})$.

Fisso $n \in \mathbb{N}$ $\delta = \frac{1}{n}$

Costruisco la partizione dell'unità

$\theta_{j,n}$ $j = 1 \dots m_n$

e poi considero l'insieme

$$A_n = \left\{ \sum_{j=1}^{m_n} \xi_j \, \theta_{j,n}(x) \qquad \xi_j \in \mathbb{Q} \right\}$$

numerabile

$$A = \bigcup_{n=1}^{\infty} A_n$$ numerabile ed è denso per lo step 2.

Come si collegano questi oggetti

$\mu \in (C(\overline{\Omega}))^*$ con l'usuale nozione di

misura come funzione di insieme?

Vale il seguente

<u>TEOREMA</u> (Riesz - Markov)

Sia $\mu \in (C(\overline{\Omega}))^*$. Allora $\exists!$ una misura di Borel con segno ν t.c.

$$\langle \mu, f \rangle = \int_{\overline{\Omega}} f(x)\, d\nu(x) \qquad \forall f \in C(\overline{\Omega})$$

e si ha
$$\|\mu\|_{M(\overline{\Omega})} = |\nu|(\overline{\Omega}) < \infty$$

Viceversa, fissata una misura di Borel ν con segno t.c. $|\nu|(\overline{\Omega}) < \infty$, questa definisce μ come sopra

OSS In generale la convergenza debole (per es. in $L^2(\Omega)$) è "distrutta" da una composizione non lineare.

Es $\mathrm{sen}(nx) \rightharpoonup 0 \qquad L^2(0,1)$

ma $$(\mathrm{sen}(nx))^2 = \frac{1}{2}\Big(1 - \underbrace{\cos(2nx)}_{\downarrow\, 0}\Big) \rightharpoonup \frac{1}{2} \neq 0^2$$

Ma c'è una rilevante eccezione

Supponiamo Ω aperto limitato

$u_n \rightharpoonup u$ debole $H^1(\Omega)$

Sia $T: \mathbb{R} \to \mathbb{R}$ una funzione C^1 e globalmente lipschitziana

$T(u_n) \in H^1(\Omega)$

$|T(s)| \le c_1 + c_2 |s|$

$\|T(u_n)\|_{L^2}$ limitata.

$$\nabla T(u_n) = T'(u_n) \nabla u_n \quad \text{limitato } L^2.$$

limitato

$T(u_n)$ limitato in $H^1(\Omega)$

Posso supporre $T(u_{n_k}) \rightharpoonup g \quad H^1(\Omega)$

Domanda $g = T(u)$? sì.

Vale Rellich–Kondrachov.

$$u_{n_k} \rightharpoonup u \quad H^1(\Omega) \overset{RK}{\Longrightarrow} u_{n_k} \to u \quad L^2(\Omega)$$

$$\Downarrow \text{ sott}$$

$$u_{n_{k_h}} \to u \quad \text{q.o.}$$

$$\Downarrow$$

$$T(u_{n_{k_h}}) \to T(u) \quad \text{q.o.}$$

$$T(u_{n_{k_h}}) \rightharpoonup g \quad H^1(\Omega)$$

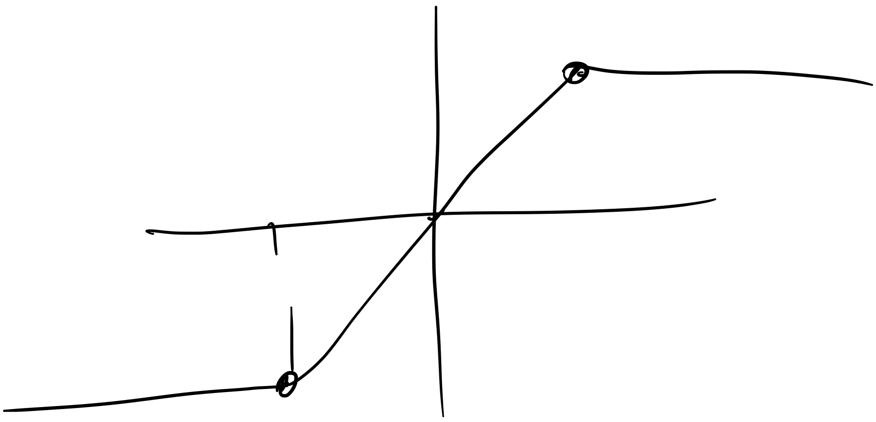
$$\Downarrow$$

$$T(u_{n_{k_h}}) \to g \quad L^2(\Omega)$$

$$\Rightarrow \quad g = T(u)$$

$\Rightarrow$ Tutta la succ^{ne} $T(u_n)$ tende a $T(u)$ deb $H^1(\Omega)$

Caso particolare $T(s) = T_M(s)$



Questa non è $C^1(\Omega)$

$$\nabla T_M(u_n) = \begin{cases} 0 & |u_n| > M \\ \cancel{T'(u_n)\,\nabla u_n} & |u_n| = M \\ \nabla u_n & |u_n| < M \end{cases}$$

?

Teorema: sull'insieme $\{u_n = M\}$ $\nabla u_n = 0$ q.o.

$$\nabla T_M(u_n) = \nabla u_n \; \chi_{\{|u_n| < M\}}$$

$$u_n \rightharpoonup u \quad H^1(\Omega) \Rightarrow T_M(u_n) \rightharpoonup T_M(u) \quad H^1(\Omega)$$