Compilare il questionario OPIS con uno dei seguenti codici.

TEOREMI di STAMPACCHIA e di LAX-MILGRAM

H spazio di Hilbert

$a(u,v) : H \times H \to \mathbb{R}$

bilineare, si dice

- continua se $|a(u,v)| \leq c\, \|u\|\, \|v\|$
- coercitiva se $\exists\, \alpha > 0$ t.c.

$$a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2$$

- simmetrica se $a(u,v) = a(v,u)$

TEOREMA (STAMPACCHIA)

$a(u,v)$ bilineare, continua e coercitiva su H.

$K \subset H$ convesso, chiuso, non vuoto

Allora $\forall \varphi \in H^* \ \exists!\ u \in K$ t.c.

$$a(u, v-u) \geq \langle \varphi, v-u \rangle \quad \forall v \in K.$$

Inoltre se a è simmetrica, u è caratterizzata da

$u \in K$, u minimizza $J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle$

su K.

TEOREMA delle CONTRAZIONI (o Banach-Caccioppoli)

S contrazione in (X,d) sp. metrico completo.

Allora $\exists!\, x \in X$ t.c. $S(x) = x$

DIM. (stampacchia)

1°) Thm di Riesz-Frechet

$\exists!\ \xi \in H$ t.c. $\langle \varphi, v \rangle = (\xi, v)\ \forall v \in H$.

Fissiamo $u \in H$, e considero la funzione

$$a(u,\cdot): H \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$v \longmapsto a(u,v)$$

lineare e continua, cioè è un funzionale di H^* $\Rightarrow$ [Riesz-Frechet] $\Rightarrow \exists!\, A(u) \in H$ t.c

$$a(u,v) = (A(u), v) \qquad \forall v \in H.$$

OSS. $A: H \longrightarrow H$

A lineare

A continuo

$$(A(u), v) = a(u,v) \leq c\, \|u\|\, \|v\|$$

$$\|A(u)\| \leq c\, \|u\|$$

Inoltre $(Au, u) = a(u,u) \geq \alpha \|u\|^2$.

Il nostro pb è diventato: trovare $u \in K$ t.c.

$$(Au, v-u) \geq (\xi, v-u) \quad \forall v \in K.$$

Questo equivale, se $\rho > 0$ (da fissare), $u \in K$ t.c.

$$(\underbrace{\rho\xi - \rho A u + u}_{x \in H} - u, \ v-u) \leq 0 \quad \forall v \in K$$

$$(x-u, v-u) \leq 0 \qquad \forall v \in K.$$

Questa è la caratterizzazione della proiezione di x su K.

$$u = P_K x = P_K(\rho\xi - \rho A u + u)$$

Sto cercando un punto fisso di

$$S(v) = P_K(\rho\xi - \rho A v + v).$$

Idea: se scelgo ρ opportunamente questa è una contrazione in H.

Devo provare che

$$\|S(v_1) - S(v_2)\| \leq \delta \|v_1 - v_2\| \quad \text{con } \delta < 1 \quad \forall v_1, v_2 \in H$$

Poiché la proiezione su K non aumenta le distanze, basta provare che

$\rho\xi - \rho A v + v$ è una contrazione.

$$\| (\cancel{\rho\xi} - \rho A v_1 + v_1) - (\cancel{\rho\xi} - \rho A v_2 + v_2) \|^2 =$$

$$= \| \rho (A v_2 - A v_1) + (v_1 - v_2) \|^2$$

$$= \| v_1 - v_2 \|^2 + \rho^2 \underbrace{\| A v_1 - A v_2 \|^2}_{\substack{\wedge\!\!\!\backslash \\ c^2 \| v_1 - v_2 \|^2}} - 2\rho \underbrace{(A v_1 - A v_2, v_1 - v_2)}_{\substack{(A(v_1 - v_2), v_1 - v_2) \\ \vee\!\!/ \\ \alpha \| v_1 - v_2 \|^2}}$$

$$\leq \| v_1 - v_2 \|^2 \underbrace{(1 + c^2 \rho^2 - 2\rho\alpha)}_{\substack{\text{se } \rho \text{ piccolo, allora} \\ \text{questa costante è } < 1.}}$$

Quindi, con questa scelta di ρ, ho concluso

Se poi $a(u,v)$ è simmetrica, allora $a(u,v)$ è un prodotto scalare, che definisce una norma equivalente a quella data.

Per Riesz-Frechet, data $\varphi \in H^*$ $\exists !\, g \in H$ t.c.

$$\langle \varphi, v \rangle = a(g, v)$$

Quindi la richiesta: trovare $u \in K$ t.c.

$$a(u, v-u) \geq (\varphi, v-u) \qquad \forall v \in K$$

$$|||u|||^2 = a(u,u) \leq c\, \|u\|^2$$

diventa Trovare $u \in K$ t.c.

$$a\,(g-u,\, v-u) \leq 0 \qquad \forall v \in K.$$

Cioè u è la proiezione di g su K con questo nuovo prodotto scalare quindi u minimizza su K

$$a\,(g-v,\, g-v)$$

cioè minimizza

$$\cancel{a(g,g)} + a(v,v) - 2a(g,v)$$

cioè minimizzare

$$\frac{1}{2}\, a(v,v) - \underbrace{a(g,v)}_{= \langle \varphi, v \rangle} \qquad \text{su } K.$$

$\square$

Conseguenza: Teorema di Lax-Milgram

(Caso particolare $K = H$)

H sp. di Hilbert.

$a(u,v)$ forma bilineare, continua, coercitiva.

$\forall \varphi \in H^* \quad \exists!\, u \in H$ t.c.

$$a(u,v) = \langle \varphi, v \rangle \qquad \forall v \in H$$

Inoltre, se a è simmetrica, u è caratterizzato dalla proprietà

$u \in H$ minimizza $\quad J(v) = \frac{1}{2} a(v,v) - \langle \varphi, v \rangle$.

Dim Applico Stampacchia con $K = H$

$\Rightarrow \exists!\, u \in H$ t.c.

$$a(u, v-u) \geq \langle \varphi, v-u \rangle \qquad \forall v \in H$$

$v-u$ è un generico elemento di H

$$\Rightarrow \quad a(u,w) \geq \langle \varphi, w \rangle \qquad \forall w \in H$$

$w \longrightarrow -w \Rightarrow$ cambia verso

$\Rightarrow$ vale l'uguaglianza. $\square$

Torniamo ai pb. differenziali

Consideriamo il pb. differenziale Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^N$

$$\begin{cases} \underbrace{-\operatorname{div}(A(x)\nabla u)}_{= -\sum_{i,j=1}^{N} \frac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\right)} = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega . \end{cases}$$

$a_{ij}(x)$ sono funzioni $L^\infty(\Omega)$ t.c.

$$\sum_{i,j=1}^{N} a_{ij}(x)\,\xi_i\,\xi_j \geq \alpha \|\xi\|^2 \quad \forall \xi \in \mathbb{R}^N$$

q.o. $x \in \Omega$.

$\alpha > 0$

Una solne debole di questo pb. è

$u \in H_0^1(\Omega)$ t.c.

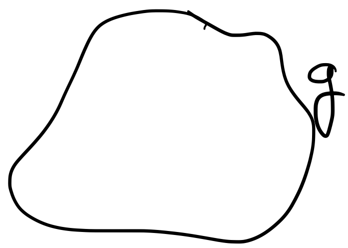
$$\underbrace{\sum_{i,j=1}^{N} \int_\Omega a_{ij}(x) \frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx}_{a(u,v)} = \int_\Omega f v\, dx \quad \forall v \in H_0^1(\Omega)$$

Se a_{ij} è simmetrica, l'esistenza e l'unicità segue da Riesz-Fischer.

Se a_{ij} non è simmetrica, segue da Lax-Milgram.

Pb. di Poisson / Dirichlet non omogeneo

$$(P)\quad \begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{in } \Omega \\ u = g & \partial\Omega \end{cases}$$



- Ω aperto limitato
- $f \in L^2(\Omega)$.
- g definita su $\partial\Omega$ t.c.

$\exists\ \tilde{g} \in H^1(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ t.c. $\tilde{g}\big|_{\partial\Omega} = g$.

Bisogna dare una nozione di sol^{ne} debole di (P)

$K = \tilde{g} + H^1_0(\Omega)$ è convesso, chiuso e non vuoto di $H^1(\Omega)$

La nozione di soluzione debole è

$u \in K$ t.c.

$$\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v + \int_\Omega u v = \int_\Omega f v \quad \forall v \in H^1_0(\Omega)$$

PROP. $\exists !$ u sol^{ne} debole di (P)

Inoltre u è sol^{ne} di un pb. di minimo

$$J(u) = \min_{v \in K} J(v)$$

$$J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega |\nabla v|^2 + \frac{1}{2}\int_\Omega v^2 - \int_\Omega f v.$$

Dim Applichiamo Stampacchia con K indicato

e $a(u,v) = \int \nabla u \cdot \nabla v + \int u v = (u,v)_{H^1(\Omega)}$

bilineare, continua e coercitiva, e simmetrica.

$\langle \varphi, u \rangle = \int f u \qquad \varphi \in (H^1(\Omega))^*$

$\overset{\text{Stamp.}}{\Longrightarrow} \quad \exists !\; u \in K$ t.c.

$$a(u, v-u) \geq \langle \varphi, v-u \rangle \qquad \forall v \in K.$$

cioè

$$\int \nabla u \cdot \nabla(v-u) + \int u(v-u) \geq \int f(v-u) \qquad \forall v \in K.$$

Prendo $v = u + w$ con $w \in H^1_0(\Omega)$

$\tilde{g} + H^1_0$ $\quad K$

$$\int \nabla u \cdot \nabla w + \int u w \geq \int f w \quad \forall w \in H^1_0(\Omega)$$

$w \to -w$

$$\Rightarrow \int \nabla u \cdot \nabla w + \int u w = \int f w \quad \forall w \in H^1_0(\Omega)$$

Le ipotesi su g sembrano un po' forti.
In realtà (se uno conosce la teoria delle tracce di funzioni di spazi di Sobolev)
basta che g sia la "traccia" di una funzione $H^1(\Omega)$.
Per es. se $\partial\Omega$ è di classe C^1, basta $g \in C^1(\partial\Omega)$, ma basta anche $g \in L^2(\partial\Omega)$

Approccio alternativo:

$$\begin{cases} -\Delta u = f & \Omega \\ u = g & \text{in } \partial\Omega \end{cases} \qquad g = \tilde{g}\big|_{\partial\Omega} \quad \tilde{g} \in H^1(\Omega)$$

Considero $u - \tilde{g} = \tilde{u} \in H^1_0(\Omega)$

$$\begin{cases} -\Delta \tilde{u} = f + \Delta \tilde{g} \\ \tilde{u} = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

se $\tilde{g} \in W^{2,2}(\Omega) = H^2(\Omega)$

Se $\tilde{g} \in H^1(\Omega)$, come interpreto $\Delta \tilde{g}$?

In senso debole. Se $v \in H^1_0(\Omega)$, definisco

$$\langle \Delta \tilde{g}, v \rangle = - \int_\Omega \nabla \tilde{g} \cdot \nabla v \, dx$$

Quindi la nozione di sol^ne debole diventa

$\tilde{u} \in H^1_0(\Omega)$

$$\int_\Omega \nabla \tilde{u} \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx - \int_\Omega \nabla \tilde{g} \cdot \nabla v \, dx$$

$\forall v \in H^1_0(\Omega)$

Pb. di Neumann omogeneo

Ω ap. limitato di classe C^1.

$$(P) \quad \begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{in } \Omega \\ \dfrac{\partial u}{\partial \nu} = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

Una sol^{ne} classica è una $u \in C^2(\Omega) \cap C^1(\overline{\Omega})$ t.c. (P) sia verificato in senso puntuale

Def di sol^{ne} debole

$u \in H^1(\Omega)$ t.c.

$$\underbrace{\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx + \int_\Omega u v \, dx}_{(u,v)_{H^1(\Omega)}} = \int_\Omega f v \, dx \quad \forall v \in H^1(\Omega)$$

OSS non è chiaro dove sia scritta la cond^{ne} al bordo.

OSS ogni sol^{ne} classica $C^2(\overline{\Omega})$ è una sol^{ne} debole

si moltiplica per $v \in C^1(\overline{\Omega})$ e si integra

$$\underbrace{-\int_\Omega \Delta u \, v}_{\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v - \int_{\partial\Omega} \cancel{\frac{\partial u}{\partial \nu}} v \, d\sigma} + \int_\Omega u v = \int_\Omega f v$$

Se Ω è regolare, le funzioni $C^1(\overline{\Omega})$ sono dense in $H^1(\Omega)$ e quindi posso prendere $v \in H^1(\Omega)$.

2) Esistenza e unicità di una sol^{ne} debole.

Teorema di Riesz-Frechet

3) Regolarità: se "tutto è regolare", allora una sol^{ne} debole è regolare, per es. $C^2(\overline{\Omega})$ (un po' tecnico).

4) Se u è una soluzione debole di classe $C^2(\overline{\Omega})$, allora è una sol^{ne} classica.

a) Prendo $v \in C^1_0(\Omega)$

$$\int \nabla u \cdot \nabla v + \int u v = \int f v \qquad \forall v \in C^1_0(\Omega)$$

Se $u \in C^2$, posso integrare per parti

$$\Rightarrow \int_\Omega (-\Delta u + u - f) v = 0 \qquad \forall v \in C^1_0(\Omega)$$

$$\Rightarrow -\Delta u + u - f = 0 \quad \cancel{\text{q.o. in } \Omega} \quad \forall x \in \Omega.$$

b) Moltiplico per $v \in C^1(\overline{\Omega})$

$$\underbrace{\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v}_{} + \int_\Omega u v = \int_\Omega f v$$

$$-\int_\Omega \Delta u \cdot v + \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, d\sigma$$

Poiché so già che

$$-\Delta u + u = f \quad \forall x$$

$$\Rightarrow \int_{\partial\Omega} \frac{\partial u}{\partial \nu} v \, d\sigma = 0 \qquad \forall v \in C^1(\overline{\Omega})$$

$$\Rightarrow \frac{\partial u}{\partial \nu} = 0 \qquad \forall x \in \partial\Omega$$