Intensità dell'onda e energia trasportata (FMUV 11.8.1)

Riprendiamo ora la corda vibrante, e calcoliamo l'energia cinetica e potenziale associate ad un elemento μdx di corda vibrante per un'onda sinusoidale progressiva $y = A\sin(kx - \omega t)$:

$$dK = \frac{1}{2}\mu dx \dot{y}^2$$

dove $\dot{y} = -A\omega\cos(kx - \omega t)$ per cui:

$$dK(t) = \frac{1}{2}\mu dx A^2 \omega^2 \cos^2(kx - \omega t)$$

Il massimo valore dell'energia cinetica è $dK_{\max} = \frac{1}{2}\mu dx A^2 \omega^2$

che in assenza di dissipazione sarà uguale all'energia totale:

$$dE = dK(t) + dV(t) = dK_{\max} = \frac{1}{2}\mu dx A^2 \omega^2$$

l'energia infinitesima associata ad un tratto dx è proporzionale al quadrato dell'ampiezza

Intensità dell'onda e energia trasportata **(FMUV 11.8.1)**

Se consideriamo che l'onda progressiva si sposta con velocità v, nel tempo dt anche questa energia dE associata al tratto dx scorrerà lungo la corda con velocità v.

L'energia che passa attraverso una sezione della corda nel tempo dt si ottiene quindi sostituendo a dx la quantità vdt:

$$dE = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2 dx = \frac{1}{2}\mu A^2\omega^2 v dt$$

Possiamo definire l'intensità I come l'energia che fluisce nell'unità di tempo (ed ha quindi le dimensioni di una potenza):

$$I = \frac{dE}{dt} = \frac{1}{2}\mu v A^2\omega^2$$

In questa espressione, alcuni termini dipendono dalla natura dell'onda particolare considerata.

La dipendenza dal quadrato dell'ampiezza e della frequenza è invece una caratteristica generale di qualunque tipo di onda.

Intensità e energia (2)

Nel caso della corda vibrante che abbiamo preso ad esempio, l'intensità (ossia l'energia trasportata per unità di tempo) dipende dalle caratteristiche del mezzo (densità lineare di massa, tensione della corda).

In altri tipi di onde le caratteristiche del mezzo possono entrare in maniera diversa.

La proporzionalità dell'intensità dell'onda con il quadrato dell'ampiezza e con il quadrato della frequenza è invece del tutto generale per onde sinusoidali che si propaghino in qualunque mezzo, anche quando non siano presenti oscillatori armonici meccanici:

$$I \propto A^2\omega^2\cos^2(kx-\omega t)$$

Se si considera l'energia trasportata in un intero periodo attraverso una posizione x^*, l'intensità media dell'onda sarà proporzionale a:

$$I \propto \frac{1}{T}\int_0^T A^2\omega^2\cos^2(kx^*-\omega t)dt = \frac{1}{2}A^2\omega^2$$

Eq. delle onde in tre dimensioni (FMU 11.2)

Generalizzando al caso tridimensionale, nel quale la perturbazione è una qualunque grandezza che si discosta dal suo valore di equilibrio (per esempio la pressione nelle onde sonore, o il valore dei campi elettrico e magnetico nelle onde elettromagnetiche), l'eq. di d'Alembert è della forma:

$$\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial y^2} + \frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial z^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f(x,y,z)}{\partial t^2}$$

dove f può essere una quantità scalare o un vettore e v ha sempre le dimensioni di una velocità.

In questo caso per una sorgente puntiforme si può dimostrare che la soluzione è una funzione del tipo

$$\frac{1}{r} f(r - vt)$$

dove r è la distanza di un punto dello spazio dalla sorgente.

La dipendenza da $1/r$ garantisce che l'intensità (l'energia trasportata nell'unità di tempo) integrata su tutto il fronte sferico sia indipendente dal raggio (garantisce quindi la conservazione dell'energia totale emessa)

A grande distanza dalla sorgente, l'onda sferica può essere approssimata come un'onda piana tangente alla superficie sferica

Onde piane e rappresentazione complessa (FMUV 11.3)

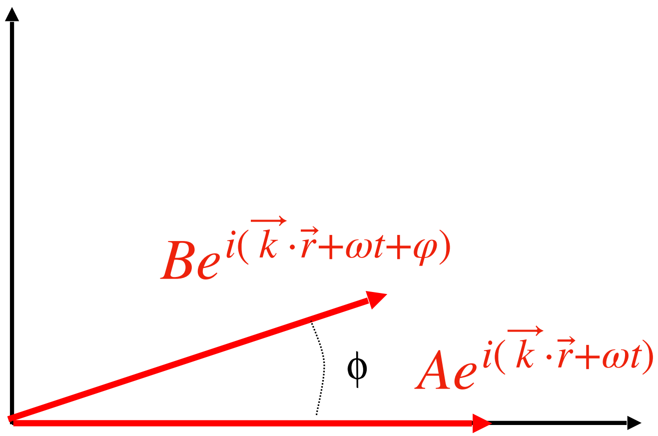
Un'altra possibile soluzione dell'equazione di d'Alembert nello spazio tridimensionale è quindi $f(\vec{r},t) = f(\vec{r}\cdot\hat{u} \mp vt)$ che rappresenta un'onda che assume lo stesso valore su un piano ortogonale al versore $\hat{u}$.

Questo piano si sposta nel tempo con velocità pari a $\vec{v} = \mp v\hat{u}$

Un'onda piana sinusoidale, o armonica, o monocromatica, assume la forma $f(\vec{r},t) = A\cos(\vec{k}\cdot\vec{r} \mp \omega t + \varphi)$, dove $\vec{k}$ è il vettore d'onda.

Un'onda piana può essere rappresentata in forma complessa come la proiezione sull'asse dei numeri reali di un vettore complesso (fasore) di modulo pari all'ampiezza che ruota con velocità angolare ω:

$$f(\vec{r},t) = Ae^{i(\vec{k}\cdot\vec{r}\mp\omega t+\varphi)}$$



In questo modo due onde che si propagano nella stessa direzione con la stessa frequenza ma con fasi diverse sono rappresentate da due fasori che formano un angolo pari alla fase e la loro somma si ottiene con la regola del parallelogramma.

Sovrapposizione di due onde sinusoidali

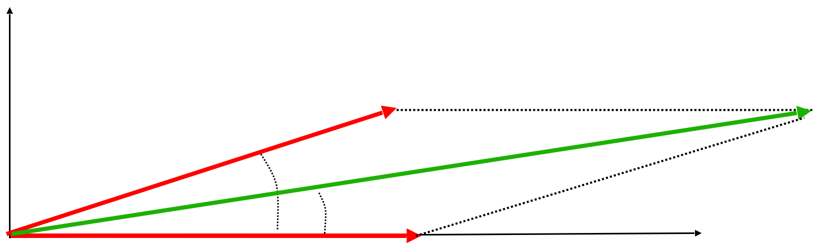
La notazione complessa semplifica notevolmente la somma delle ampiezze di due onde monocromatiche di pari frequenza ma di fase diversa, essenziale nei processi di interferenza, che potrebbe essere comunque derivata ricorrendo alle formule di prostaferesi:

$$\cos\alpha + \cos\beta = 2\cos\frac{\alpha+\beta}{2}\cos\frac{\alpha-\beta}{2}$$

Per esempio se le due onde hanno anche la stessa ampiezza abbiamo:

$$f_1 = A\cos(kx-\omega t); \quad f_2 = A\cos(kx-\omega t+\varphi)$$

$$f_1 + f_2 = A\cos(kx-\omega t) + A\cos(kx-\omega t+\varphi) = 2A\cos\frac{\varphi}{2}\cos(kx-\omega t+\frac{\varphi}{2})$$



Nel piano complesso, lo stesso risultato si ottiene immediatamente dalla regola del parallelogramma per la somma di due vettori

$$\varphi = 0 \quad \Rightarrow \quad f_1 + f_2 = 2f = 2A\cos(kx-\omega t)$$

$$\varphi = \pi \quad \Rightarrow \quad f_1 + f_2 = 0$$

Interferenza (FMUV 11.3.3, FMU 11.4)

Due onde della stessa natura che si sovrappongono nella stessa regione di spazio possono dar luogo a fenomeni di interferenza.

Come abbiamo visto, se le onde sono armoniche e di pari frequenza, la loro sovrapposizione è data da

$$f_1 + f_2 = 2A\cos\frac{\varphi}{2}\cos\left(kx - \omega t + \frac{\varphi}{2}\right)$$

ossia un'onda di ampiezza pari a $2A\cos\frac{\varphi}{2}$, che può variare da 0 a $2A$ a seconda della fase relativa delle due onde:

- onde in opposizione di fase, interferenza distruttiva
- onde in fase, interferenza costruttiva

In termini di intensità, ossia di energia trasportata, proporzionale ad A^2, questa può andare da 0 a 4 volte l'intensità della singola onda.

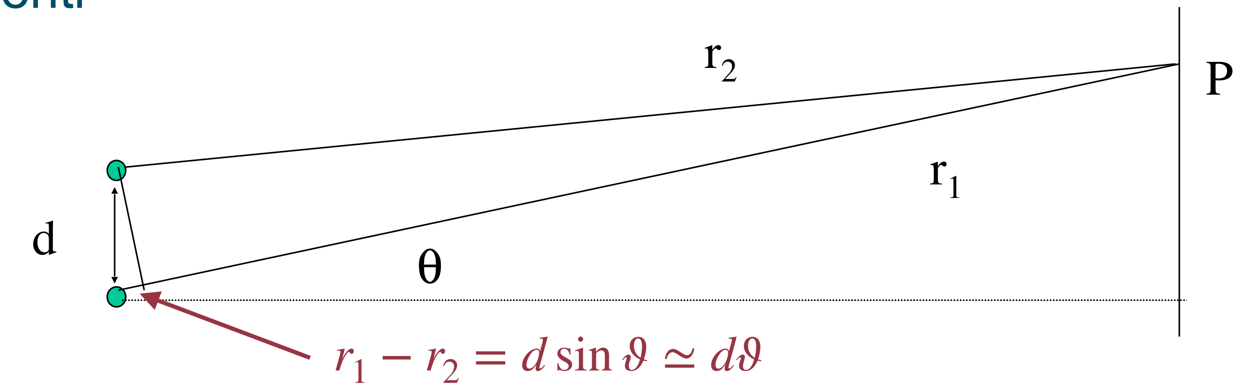
Il risultato può sembrare paradossale, perché la sovrapposizione di due onde sembra poter fornire fino ad un'energia doppia rispetto alla somma delle energie delle due onde separate.

Il paradosso scompare se si considerano i meccanismi che generano la sovrapposizione.

Interferenza tra due sorgenti vicine

Immaginiamo di avere due sorgenti sinusoidali poste ad una distanza d l'una dall'altra, che emettono onde della stessa frequenza in fase tra loro (per es. due altoparlanti pilotati dallo stesso segnale)

Misuriamo l'ampiezza della sovrapposizione delle due onde in un punto P di un piano posto ad una certa distanza r (grande rispetto a d) dal piano delle due sorgenti



La fase tra le due onde in P è data dal prodotto del numero d'onda per la differenza di percorso (in ottica, "cammino ottico"):

$$\varphi = k(r_1 - r_2) = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) \simeq \frac{2\pi}{\lambda}\vartheta d$$

L'intensità della sovrapposizione è massima se le due onde arrivano in fase in P, nulla se arrivano in opposizione di fase.

Interferenza tra due sorgenti vicine (2)

L'intensità della sovrapposizione è massima se le due onde sono in fase o sono sfasate di un multiplo di 2π, ossia

$$n2\pi = \frac{2\pi}{\lambda}(r_1 - r_2) \quad \Rightarrow \quad r_1 - r_2 = n\lambda, \quad \vartheta = \frac{n\lambda}{d}$$

L'ampiezza della sovrapposizione è nulla (e quindi l'intensità è nulla) quando la fase è un multiplo dispari di π, ossia

$$\left(n + \frac{1}{2}\right)2\pi = (r_1 - r_2)\frac{2\pi}{\lambda} \quad \Rightarrow \quad r_1 - r_2 = \left(n + \frac{1}{2}\right)\lambda, \quad \vartheta = \left(n + \frac{1}{2}\right)\frac{\lambda}{d}$$

Quindi al variare di ϑ sul piano di arrivo vi sono delle zone di massima intensità (ossia dove l'energia è pari a 4 volte l'energia di una singola onda) alternate a zone dove l'intensità è nulla, ossia nelle quali l'energia trasportata dalle due onde si cancella completamente.

Integrando su tutto lo schermo (ossia facendo la media), l'energia si conserva.

Le figure che si formano in questo modo si chiamano frange di interferenza.

Va sottolineato che per osservare le frange di interferenza le due sorgenti devono essere coerenti, ossia devono mantenere costantemente la stessa fase per un grande numero di periodi