Unicità del pb di minimo

$$J(u) = \min_{v \in H^1_0(\Omega)} J(v)$$

$$J(v) = \frac{1}{2} \|v\|^2_{H^1_0(\Omega)} - \int f v.$$

senza passare per l'eq^ne "debole".

Si basa sul fatto che il funzionale J è strettamente convesso

$$J\left(\frac{u+v}{2}\right) < \frac{1}{2}\left(J(u) + J(v)\right) \qquad \forall u, v \in H^1_0(\Omega) \quad u \neq v.$$

$$\cancel{\frac{1}{2}} \left\| \frac{u+v}{2} \right\|^2_{H^1_0} \cancel{- \frac{1}{2}\int f(u+v)} \overset{?}{<} \cancel{\frac{1}{2}} \left(\frac{1}{2} \|u\|^2 \cancel{- \int_\Omega f u} + \frac{1}{2} \|v\|^2 \cancel{- \int f v} \right)$$

$$\frac{1}{4} \|u+v\|^2 \overset{?}{<} \frac{1}{2} \|u\|^2 + \frac{1}{2} \|v\|^2$$

$$\|u+v\|^2 \overset{?}{<} 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$

[Per l'identità del parallelogramma

$$\|u+v\|^2 = -\|u-v\|^2 + 2\|u\|^2 + 2\|v\|^2$$
]

$$-\|u-v\|^2 \overset{?}{<} 0 \qquad \text{OK se } u \neq v.$$

Da questo segue l'unicità del minimo.

Se u, v sono pti di minimo $(u \neq v)$

$$J(u) = J(v) = \min_{w \in H_0^1(\Omega)} J(w) = m$$

$$\frac{u+v}{2} \in H_0^1(\Omega)$$

$$J\left(\frac{u+v}{2}\right) < J(u) = m \qquad \text{assurdo.}$$

Passo 4 Se u è sol^{ne} debole di (P)

$$(P) \begin{cases} -\Delta u + u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

e $u \in C^2(\overline{\Omega})$ (basta $C^2(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$)
allora u è una sol^{ne} classica di (P).

$$\underbrace{\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v}_{= -\int_\Omega \Delta u \cdot v} + \int_\Omega uv = \int_\Omega f v \qquad \forall v \in C_0^1(\Omega)$$

continua

$$\Rightarrow \int_\Omega \underbrace{(-\Delta u + u - f)}_{\text{continua}} v \, dx = 0 \qquad \forall v \in C_0^1(\Omega)$$

$$\Rightarrow \quad -\Delta u + u = f \qquad \forall x \in \Omega$$

Questo è un approccio possibile all'esistenza di una sol^{ne} classica di (P).

Altri approcci possibili:

- funzioni di Green e formule di rappresentazione
- stime di Schauder.
- metodo di Perron

Ma in realtà il metodo delle soluzioni deboli permette di dare un significato alle sol^{ni} del pb. (P) in un contesto più generale.

Per es.

- Ω aperto non regolare
- Basta $f \in L^2(\Omega)$

  Anzi, basta f ancor meno integrabile

$$v \in H_0^1(\Omega) \Rightarrow v \in L^{2^*}(\Omega) \qquad 2^* = \frac{2N}{N-2} > 2$$

Sobolev

$N > 2$

e l'inclusione è continua

$$\Rightarrow \text{Basta che } f \in L^{(2^*)'}(\Omega) = L^{2_*}(\Omega)$$

$$(2^*)' = \frac{2^*}{2^*-1} = \frac{2N}{2N-(N-2)} = \frac{2N}{N+2} =: 2_*$$

Se $N=2$, allora $H_0^1(\Omega) \subset L^q(\Omega)$ $\forall q < \infty$
quindi basta $f \in L^q(\Omega)$ dove $q > 1$ arbitrario.

- Operatore meno regolare (tra poco).

Eq^{ne} di Poisson senza termine di ordine zero
(con cond^{ni} al bordo di Dirichlet omogenee)

$$
(P) \begin{cases} -\Delta u = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}
$$

In questo caso la def^{ne} di sol^{ne} debole è

$$
\begin{cases} u \in H_0^1(\Omega) \\ \displaystyle\int_\Omega \nabla u \cdot \nabla v \, dx = \int_\Omega f v \, dx \qquad \forall v \in H_0^1(\Omega) \end{cases}
$$

Tutto può essere ripetuto come prima, con l'unica differenza che su $H_0^1(\Omega)$ si usa la norma

$$
\|u\|^2_{H_0^1(\Omega)} = \int_\Omega |\nabla u|^2 dx
$$

che è equivalente alla usuale per la dis. di Poincaré

$$
\|u\|_{L^2} \leq C(\Omega) \|\nabla u\|_{L^2} \quad \forall u \in H_0^1(\Omega)
$$

Operatori lineari a coeff^{ti} discontinui.

$$(P)\begin{cases} -\sum_{i,j=1}^{N} \dfrac{\partial}{\partial x_i}\left(a_{ij}(x)\dfrac{\partial u}{\partial x_j}\right) \;(+u) = f & \text{in } \Omega \\ u = 0 & \text{su } \partial\Omega \end{cases}$$

se $a_{ij} = \delta_{ij} = \begin{cases} 1 & \text{se } i=j \\ 0 & i \neq j \end{cases}$,

ritroviamo il laplaciano

Tuttavia questo tipo di operatore (operatori ellittici in forma di divergenza) permettono di studiare problemi fisici in mezzi discontinui o anisotropi

Se definiamo la matrice

$A(x) = \{a_{ij}(x)\}_{i,j=1\dots N}$ l'operatore

si può scrivere nella forma

$$-\operatorname{div}\left(A(x)\nabla u\right) = f$$

$+$ ipotesi su $A(x)$

Come definire la sol^{ne} debole

$$\int (A(x)\nabla u)\cdot\nabla\varphi\,dx = \int f\varphi \quad \forall\varphi\in C_0^1(\Omega)$$

$$\parallel$$

$$A(x)\nabla u\,\nabla\varphi$$

$$\parallel$$

$$\sum_{i,j} a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}$$

oss se $\frac{\partial u}{\partial x_j}\in L^2$, $\frac{\partial\varphi}{\partial x_i}\in L^2$

serve $a_{ij}(x)\in L^\infty(\Omega)$

Faremo sulla matrice $A(x)=\{a_{ij}(x)\}_{i,j=1\dots N}$

le seguenti ipotesi:

1) $a_{ij}(x)\in L^\infty(\Omega)$ $\forall i,j=1\dots N$ $\left(A(x)\in\left(L^\infty(\Omega)\right)^{N^2}\right)$

2) serve che la matrice $A(x)$ sia unif^{te} ellittica, cioè unif^{te} def^{ta} positiva.

$$\sum_{i,j=1}^N a_{ij}(x)\xi_i\xi_j \geq \alpha|\xi|^2 \quad \forall\xi\in\mathbb{R}^N$$

$(\alpha>0)$ q.o. $x\in\Omega$.

$$(A(x)\xi,\xi)\geq\alpha|\xi|^2 \qquad \parallel$$

3) $a_{ij}=a_{ji}$ (A simmetrica).

Def^{ne} di sol^{ne} debole

DEF. di SOL^{NE} DEBOLE $\quad f \in L^2(\Omega)$

Nelle ipotesi date prima, diremo che u è sol^{ne} debole di (P) se

$$\begin{cases} u \in H^1_0(\Omega) \\ \underbrace{\displaystyle\int_\Omega (A(x)\nabla u, \nabla v)\,dx}_{\displaystyle\sum_{i,j=1}^{N}\int_\Omega a_{ij}(x)\frac{\partial u}{\partial x_j}\frac{\partial v}{\partial x_i}\,dx} \left(+\int_\Omega u v\,dx\right) = \displaystyle\int_\Omega f v\,dx \quad \forall v \in H^1_0(\Omega) \end{cases}$$

TEOREMA nelle ipotesi sopra indicate, esiste ed è unica una sol^{ne} debole u di (P). Tale sol^{ne} si caratterizza come l'unico minimo del funzionale $J(v) = \frac{1}{2}\int_\Omega (A(x)\nabla v, \nabla v) - \int_\Omega f v$

La dim. è quasi identica, ma bisogna usare su $H^1_0(\Omega)$ il seguente prodotto scalare

$$(u,v)_A = \int_\Omega (A(x)\nabla u, \nabla v)\,dx$$

Esso genera una norma equivalente alla norma

$$\|u\|^2_{H^1_0} = \int_\Omega |\nabla u|^2$$

$$\alpha \int_\Omega |\nabla u|^2 \leq \int_\Omega (A(x)\nabla u, \nabla u)$$

$$\int_\Omega (A(x)\nabla u, \nabla u) \leq C \int_\Omega |\nabla u|^2 .$$

dipende dalla norma L^∞ di $A(x)$

Questo problema si può anche risolvere senza ipotesi di simmetria sulla matrice $A(x)$.
In questo caso bisogna usare, invece di Riesz-Frechet, il teorema di Lax-Milgram.

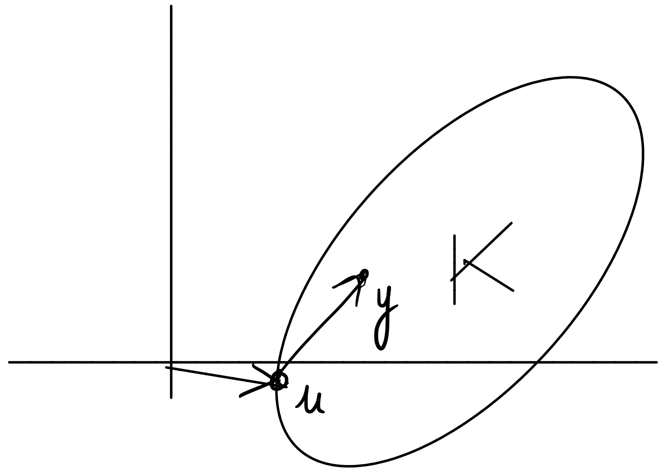
Risultati importanti sugli spazi di Hilbert.

TEOREMA H sp. di Hilbert

$K \subset H$ convesso, chiuso e non vuoto

Allora $\exists!\, u \in K$ di norma minima ed è caratterizzato da

$$(u, y-u) \geq 0 \quad \forall y \in K$$



COROLLARIO $K \subset H$ convesso chiuso non vuoto

Allora $\forall x \in H$ $\exists!$ un elemento di K che ha distanza minima da x, lo chiamiamo $P_K(x)$

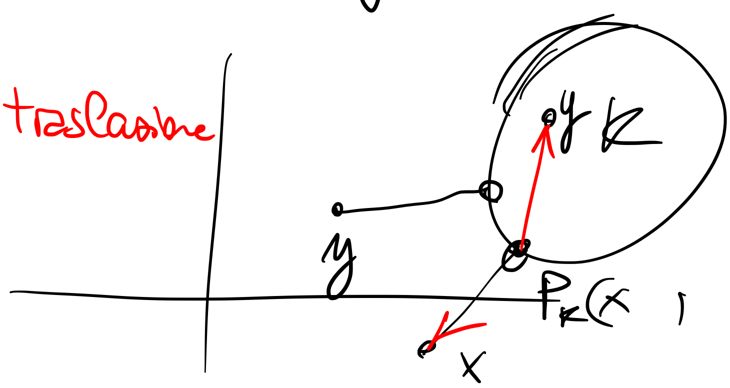
$$\|x - P_K(x)\| = \min_{y \in K} \|x-y\|$$

Inoltre $P_K(x)$ è caratterizzato dalle disuguaglianze

$$(x - P_K(x), y - P_K(x)) \leq 0 \quad \forall y \in K.$$

DIM Basta considerare la traslazione

$z \longrightarrow z - x$



<u>OSS</u> $P_K(x)$ non aumenta le distanze, cioè

$$\|P_K(x) - P_K(y)\| \le \|x - y\|$$

$$(P_K(x_2) - P_K(x_1), x_1 - P_K(x_1)) \le 0$$

$$\cancel{(P_K(x_1) - P_K(x_2), x_2 - P_K(x_2)) \le 0}$$

$$(P_K(x_2) - P_K(x_1), P_K(x_2) - x_2) \le 0$$

$$(P_K(x_2) - P_K(x_1), P_K(x_2) - P_K(x_1) - (x_2 - x_1)) \le 0$$

$$\|P_K(x_2) - P_K(x_1)\|^{\cancel{2}} \le (P_K(x_2) - P_K(x_1), x_2 - x_1) \le$$

$$\underset{\text{Cauchy-Schwarz}}{\le} \cancel{\|P_K(x_2) - P_K(x_1)\|} \; \|x_2 - x_1\|$$

X sp. metrico. Una <u>contrazione</u> in X è una funzione $S: X \to X$ t.c.

$$d(S(x), S(y)) \le \alpha \, d(x,y) \qquad \forall x,y \in X.$$

con $\alpha < 1$

TEOREMA delle CONTRAZIONI (o Banach-Caccioppoli)

S contrazione in (X,d) sp. metrico completo.

Allora $\exists !\, x \in X$ t.c. $S(x) = x$

DEF. H spazio di Hilbert

Una forma bilineare $a: H \times H \longrightarrow$

$$(u,v) \longmapsto a(u,v)$$

si dice

- continua se $$|a(u,v)| \leq C \|u\| \|v\| \quad \forall u,v \in H.$$
- coercitiva se $$a(v,v) \geq \alpha \|v\|^2. \quad \text{''}$$
- simmetrica se $$a(u,v) = a(v,u) \quad \text{''}$$