Onde trasversali e longitudinali

Le onde si possono classificare in longitudinali o trasversali a seconda che la perturbazione avvenga nella direzione dell'onda o in una direzione trasversa rispetto a questa:

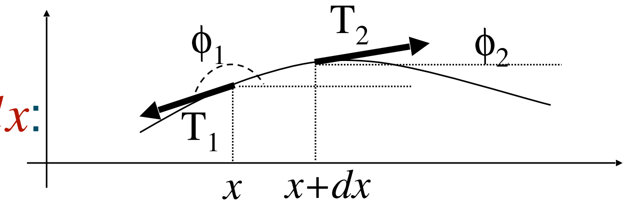
- onde longitudinali: perturbazione parallela alla propagazione
- onde trasversali: perturbazione ortogonale alla propagazione

Le onde su una corda sono trasversali, mentre le onde sonore sono longitudinali.

Solitamente, le onde rientrano in una o nell'altra di queste due categorie. Fanno eccezione le onde del mare che sono contemporaneamente longitudinali e trasversali: questa caratteristica dipende dal fatto che queste onde si generano alla superficie di separazione di due mezzi. Le onde che si propagano nel corpo di un liquido (per esempio le onde sonore nell'acqua) sono longitudinali

Come si studia un'onda? Non basta la posizione in funzione del tempo, ma si deve rappresentare la variazione della perturbazione in funzione della posizione e del tempo: eq. diff. alle derivate parziali.

Onde su una corda elastica (FMUV 11.5, FMU 11.7)



Onde trasversali su una corda di densità lineare μ.

Scriviamo il secondo principio per un elemento di corda $dm = \mu dx$:

$$\vec{T}_1 + \vec{T}_2 = \mu dx\, \vec{a}$$

Se proiettiamo sugli assi e assumiamo che la posizione x dell'elemento non cambi (perturbazione trasversale, $a_x = 0$) abbiamo:

$$T_2 \cos\varphi_2 + T_1 \cos\varphi_1 = 0 \qquad\qquad T_2 \sin\varphi_2 + T_1 \sin\varphi_1 = \mu dx \frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

(per una funzione di due variabili, la derivata parziale ∂ indica la variazione della funzione rispetto ad una variabile tenendo fisso il valore dell'altra)

Se i due angoli sono piccoli si ha:

$$\cos\varphi_1 \simeq -\cos\varphi_2 \Rightarrow \quad T_2 - T_1 \simeq 0 \quad \Rightarrow \quad T_2 \simeq T_1 = T$$ (tensione della corda)

$$\sin\varphi_1 \simeq \tan\varphi_1 = -\left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x$$

$$\sin\varphi_2 \simeq \tan\varphi_2 = \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_{x+dx} \simeq \left(\frac{\partial y}{\partial x}\right)_x + \frac{\partial^2 y}{\partial x^2} dx$$

e quindi sostituendo si ottiene l'equazione $\dfrac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \dfrac{\mu}{T}\dfrac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, equazione unidimensionale di d'Alembert

Equazione di d'Alembert **(FMUV 11.2)**

L'equazione che abbiamo derivato, $\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{\mu}{T}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$, è l'equazione unidimensionale di d'Alembert.

Alla stessa equazione, derivata per la perturbazione trasversale y lungo una corda tesa, si arriva per qualunque perturbazione non dissipativa, qualunque sia il meccanismo fisico che origina l'onda.

Tenendo conto che il coefficiente μ/T ha le dimensioni dell'inverso del quadrato di una velocità, $[ml^{-1}(mlt^{-2})^{-1}] = [t^2 l^{-2}]$, l'equazione solitamente si scrive

$$\frac{\partial^2 y}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 y}{\partial t^2}$$

Che cosa rappresenta questa equazione? Prima di tutto osserviamo che la soluzione generale $y = f(t)$ di questa eq. differenziale è rappresentata da una funzione arbitraria (purché continua e derivabile) di due particolari combinazioni di x e t: $f = f(x \pm vt)$

Equazione di d'Alembert (2)

Infatti la derivata parziale rispetto a x di $f = f(x \pm vt)$, chiamando $s = x \pm vt$, è data da:

$$\frac{\partial f(x \pm vt)}{\partial x} = \frac{df(s)}{ds}\frac{\partial (x \pm vt)}{\partial x} = \frac{df(s)}{ds}$$

e analogamente la derivata parziale rispetto a t è data da:

$$\frac{\partial f(x \pm vt)}{\partial t} = \frac{df(s)}{ds}\frac{\partial (x \pm vt)}{\partial t} = \pm v\frac{df(s)}{ds}$$

ossia $\pm\frac{1}{v}\frac{\partial f(x \pm vt)}{\partial t} = \frac{df(s)}{ds}$

uguagliando ora i primi membri si ha: $\frac{\partial f(x \pm vt)}{\partial x} = \pm\frac{1}{v}\frac{\partial f(x \pm vt)}{\partial t}$

e derivando una seconda volta si arriva alla equazione di d'Alembert:

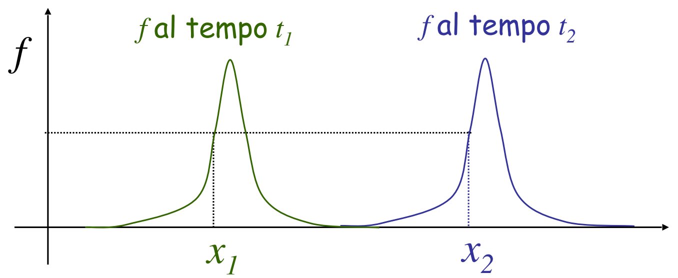
$$\frac{\partial^2 f(x \pm vt)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f(x \pm vt)}{\partial t^2}$$

il che dimostra che qualunque funzione continua e derivabile $f = f(x \pm vt)$ verifica l'equazione di d'Alembert e ne è dunque soluzione.

Proprietà delle soluzioni dell'eq.delle onde

L'espressione analitica della funzione f è arbitraria ed è fissata, p.es., dalla forma della funzione per $t = t_1$:

$$f(x, t_1)$$



Cosa rappresenta una funzione $f = f(x - vt)$?

Supponiamo di conoscere la forma della funzione ad un certo tempo t_1.

Questo vuol dire conoscere al tempo t_1 il valore di f in ogni posizione x, per esempio in x_1.

Se ora considero un successivo istante t_2, la funzione assumerà gli stessi valori nei punti x_2 tali che $x_1 - vt_1 = x_2 - vt_2$

In altri termini, la funzione è la stessa per tutte le coppie di punti tali che

$$x_2 - x_1 = v(t_2 - t_1)$$

per cui nel tempo la funzione trasla verso x crescenti con velocità

$$v = \frac{x_2 - x_1}{t_2 - t_1}$$

Analogamente, $f = f(x + vt)$ trasla verso x decrescenti con lo stesso modulo di v.

Principio di sovrapposizione

Linearità dell'equazione → Principio di sovrapposizione

Consideriamo due soluzioni dell'eq. di d'Alembert, f_1 e f_2

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2}$$

Sommando membro a membro si ha

$$\frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\left(\frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2}\right)$$

Per la linearità delle operazioni di derivazione abbiamo:

$$\frac{\partial^2 (f_1 + f_2)}{\partial x^2} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial x^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial x^2} \quad \text{e} \quad \frac{\partial^2 (f_1 + f_2)}{\partial t^2} = \frac{\partial^2 f_1}{\partial t^2} + \frac{\partial^2 f_2}{\partial t^2}$$

per cui:

$$\frac{\partial^2 (f_1 + f_2)}{\partial x^2} = \frac{1}{v^2}\frac{\partial^2 (f_1 + f_2)}{\partial t^2}$$

La somma di due soluzioni è essa stessa soluzione dell'equazione di d'Alembert.

Notiamo che le due soluzioni possono avere anche velocità opposte. La loro somma sarà ugualmente soluzione dell'equazione. Riuscite ad immaginare l'evoluzione temporale in questo caso?

Soluzioni sinusoidali dell'eq. delle onde

Se la sorgente delle perturbazioni è un oscillatore armonico di pulsazione ω, la soluzione sarà una sinusoide con pari pulsazione

Poiché l'argomento di una funzione trigonometrica deve essere adimensionale, $x \pm vt$ deve essere moltiplicato per una quantità che ha le dimensioni dell'inverso di una lunghezza e si indica con k.

La funzione può essere scritta in vari modi tra loro equivalenti:

$$f(x,t) = A\cos\big(k(x \mp vt)\big) = A\cos(kx \mp \omega t) = A\cos(2\pi\left(\frac{x}{\lambda} \mp \frac{t}{T}\right)$$

- k ha le dimensioni dell'inverso di una lunghezza ed è detto numero d'onda: $k = \dfrac{\omega}{v}$
- T è il periodo: $T = \dfrac{2\pi}{\omega}$ che è l'inverso della frequenza $\nu = \dfrac{1}{T}$ per cui $\omega = 2\pi\nu$
- λ è la lunghezza d'onda, ossia la lunghezza spaziale di una oscillazione completa a t fissato: $\lambda = \dfrac{2\pi}{k}$

Vale anche la relazione $\lambda = vT$

La frequenza della sorgente determina la frequenza dell'onda indipendentemente dalla velocità di propagazione. Se questa è diversa in mezzi diversi, saranno diverse anche le corrispondenti lunghezze d'onda, lasciando invariata la pulsazione.

Grazie al principio di sovrapposizione, qualunque onda periodica può essere sviluppata in serie di Fourier.