Terza legge per l'ellisse

Ricordando che l'area di un'ellisse è $S = \pi ab$, che $\dfrac{b^2}{a} = \dfrac{p^2}{\alpha m} = \dfrac{p^2}{GM_S m^2}$

e che la velocità areolare è $\dfrac{dA}{dt} = \dfrac{1}{2} r^2 \omega = \dfrac{p}{2m}$

poiché l'area dell'ellisse è data dal prodotto della velocità areolare costante per il periodo, deve essere

$$\pi ab = \frac{dA}{dt} T = \frac{p}{2m} T \quad \text{ossia} \quad T = \frac{2\pi mab}{p}$$

da cui ricaviamo:

$$\frac{T^2}{a^3} = \frac{4\pi^2 m^2 a^2 b^2}{p^2} \frac{1}{a^3} = \frac{4\pi^2 m^2}{p^2} \frac{b^2}{a} = \frac{4\pi^2 m^2}{p^2} \frac{p^2}{GM_S m^2} = \frac{4\pi^2}{GM_S}$$

per cui il rapporto tra il quadrato del periodo ed il cubo del semiasse maggiore dipende dalla massa del Sole, ma non dalla massa del pianeta, né dal momento angolare.

Anche in questo caso, se le due masse in gioco sono comparabili, è necessario usare la massa ridotta nella dinamica, mentre rimane $\alpha = GM_S m$ e nel risultato compare quindi la somma delle masse al posto della massa del Sole.

Forza centrale elastica su un piano (FMUV es. 5.8)

Se un corpo si muove sotto l'azione di una forza centrale elastica $\vec{f} = -k\vec{r}$

il secondo principio proiettato sulle due coordinate fornisce due equazioni indipendenti:

$$m\ddot{x} = -kx \quad ; \quad m\ddot{y} = -ky$$

la cui soluzione generale è la combinazione di due moti armonici di pari pulsazione

$$\omega = \sqrt{\frac{k}{m}}$$

(NB: ω *è la* pulsazione, NON la velocità angolare)

Le leggi orarie sono determinate dalle condizioni iniziali.

Se per $t = 0$ il punto si trova in $x(0) = a$ e $y(0) = 0$ con velocità diretta lungo y e pari a $b\omega$, le due leggi orarie sono

$$x(t) = a\cos\omega t \quad ; \quad y(t) = b\sin\omega t \quad \Rightarrow \quad \frac{x^2}{a^2} + \frac{y^2}{b^2} = 1$$

e la traiettoria è quindi rappresentata da una ellisse.

Naturalmente anche in questo caso, trattandosi di una forza centrale conservativa, si conserva il momento angolare e la velocità areolare:

$$\frac{dA}{dt} = \frac{p}{2m} = \frac{av_y(0)}{2} = \frac{\omega ab}{2}$$

Forza centrale elastica su un piano (2)

Dovendo anche essere $A = \int_0^T \frac{dA}{dt} dt = \frac{dA}{dt} T = \frac{\omega ab}{2} T$ e $T = \frac{2\pi}{\omega}$

risulta che l'area dell'ellisse deve essere $A = \pi ab$

Notiamo che una sostanziale differenza rispetto al campo gravitazionale è rappresentata dal fatto che il centro delle forze, che abbiamo scelto nell'origine delle coordinate, si trova nel centro di simmetria dell'ellisse e non in uno dei due fuochi.

Il trattamento con il potenziale efficace può essere sviluppato anche in questo caso, considerando che il potenziale della forza elastica è

$V_e = \frac{1}{2} k r^2$ mentre il potenziale centrifugo è sempre $V_C = \frac{p^2}{2mr^2}$

L'energia totale E è sempre positiva e la traiettoria è una curva chiusa e finita per qualunque valore di E.

Un pendolo sferico si comporta nello stesso modo per piccole oscillazioni, con le stesse approssimazioni per cui un pendolo può essere approssimato da un moto armonico.

Correzioni all'accelerazione di gravità (FMUV 9.8.1)

La forza centrifuga dovuta alla rotazione di ogni punto della superficie rispetto all'asse terrestre genera una correzione a g in direzione ortogonale all'asse, che dipende dalla latitudine λ:

$$\overrightarrow{g}' = -\frac{GM_T}{R^2}\hat{r} + \omega^2 R_T \cos\lambda \hat{\rho}$$

L'effetto è naturalmente massimo all'equatore e minimo al polo.

All'equatore il contributo (negativo) a g è:

$$\Delta g = -\,\omega^2 R_T$$

essendo

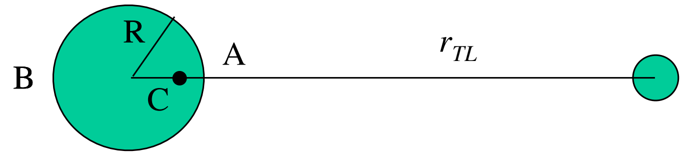
$$\omega = \frac{2\pi}{T} = \frac{2\pi}{3600 \cdot 24}\mathrm{s}^{-1} = 7 \cdot 10^{-5}\mathrm{s}^{-1}$$

$$R_T = 6.4 \cdot 10^6\,\mathrm{m}$$

si ha:

$$\Delta g = 5 \cdot 10^{-9} \cdot 6.4 \cdot 10^6\,\mathrm{m/s^2} = 3.2 \cdot 10^{-2}\,\mathrm{m/s^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{\Delta g}{g} \simeq 3 \cdot 10^{-3}$$

Maree (FMUV 9.8.2)



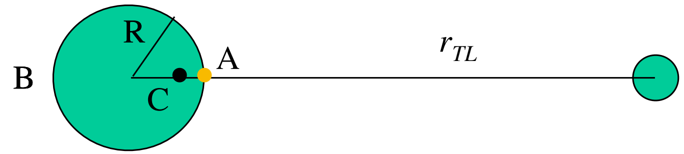
Valutiamo ora gli effetti della Luna su g, trascurando tutti gli effetti dovuti alla rivoluzione della Terra intorno al Sole.

Un sistema di coordinate con origine O nel centro della Terra ruota intorno al c.d.m. C del sistema Terra-Luna con una accelerazione a_O uguale alla forza gravitazionale tra Terra e Luna divisa per la massa della Terra: $a_O = \dfrac{GM_L}{r_{TL}^2}$.

Tutti i punti di questo riferimento ruotano solidalmente con la stessa accelerazione di trascinamento.

NB: questa rotazione intorno al c.d.m. del sistema Terra-Luna non ha nulla a che fare con la rotazione della Terra su se stessa, che come vedremo è invece responsabile dello spostamento quotidiano dei movimenti delle maree.

Maree (2)



Una massa m in una posizione A all'intersezione della superficie terrestre con la congiungente Terra-Luna sarà soggetta alla gravità terrestre g, alla attrazione della Luna $\frac{GM_L}{(r_{TL}-R)^2}$ e alla forza di trascinamento

$$f_T = -ma_O = -m\frac{GM_L}{r_{TL}^2}$$

La correzione a g sarà quindi data da

$$\frac{GM_L}{(r_{TL}-R)^2} - \frac{GM_L}{r_{TL}^2} \approx GM_L\left(\frac{1}{r_{TL}^2} + \frac{2R}{r_{TL}^3} - \frac{1}{r_{TL}^2}\right) = GM_L\frac{2R}{r_{TL}^3} \simeq 10^{-7}g$$

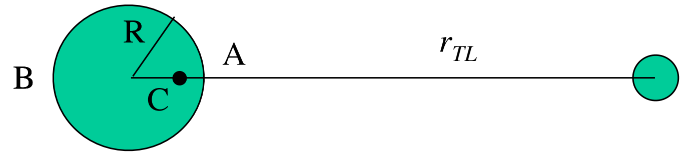
dove il verso positivo è quello in direzione della Luna (opposto a g), per cui la massa risulta alleggerita rispetto alla gravità terrestre.

Nella posizione B, il calcolo è analogo, ma con segni diversi:

$$\frac{GM_L}{(r_{TL}+R)^2} - \frac{GM_L}{r_{TL}^2} \approx GM_L\left(\frac{1}{r_{TL}^2} - \frac{2R}{r_{TL}^3} - \frac{1}{r_{TL}^2}\right) = -GM_L\frac{2R}{r_{TL}^3} \simeq -10^{-7}g$$

In questo caso, la correzione è nella direzione opposta alla direzione della Luna, ma anche g cambia segno in B, per cui il risultato corrisponde ancora ad un alleggerimento della stessa entità.

Maree (3)



Si vede immediatamente che per un terzo punto che si trovi sempre sull'equatore ma in posizione ortogonale alla direzione Terra-Luna l'effetto è enormemente minore, perchè la sua distanza dalla Luna non è molto diversa dalla distanza tra i c.d.m dei due corpi celesti.

Il risultato è che le acque (ma anche la Terra solida) subiscono due deformazioni (rigonfiamenti) nella direzione della Luna e nella direzione opposta.

Queste due deformazioni ruotano intorno alla Terra con un periodo di 28 giorni. La sottostante rotazione terrestre fa sì che, rispetto alla geografia terrestre, queste deformazioni abbiano un ciclo di 12 ore, poiché lo stesso punto geografico attraversa entrambe le deformazioni in un giorno.

L'attrazione gravitazionale del Sole ha un effetto analogo, ma il rapporto tra la massa e il cubo della distanza è circa la metà.

$M_L = 7.35\ 10^{22}$ kg, $M_S = 2\ 10^{30}$ kg; $r_{TL} = 3.84\ 10^5$ km, $r_{TS} = 1{,}5\ 10^8$ km

$$\frac{M_L}{r_{TL}^3}\frac{r_{TS}^3}{M_S} = \frac{7.35 \cdot 10^{22}}{(3.84 \cdot 10^5)^3}\frac{(1.5 \cdot 10^8)^3}{2 \cdot 10^{30}} \simeq 1.3\ 10^6/0.6\ 10^6 = 2{,}2$$

Fenomeni ondulatori (FMUV 11.1)

Conosciamo sicuramente molti fenomeni ai quali anche nel linguaggio comune si dà il nome di onde.

esempi:

- onde sulla superficie del mare
- onde che si propagano su una corda (frusta)
- onde sonore (di pressione)
- onde elettromagnetiche (onde radio e luce)

Cosa accomuna tutti questi esempi?

C'è sempre qualcosa che si propaga a cui non corrisponde una propagazione di materia

Sicuramente a ciò che si propaga è associata sempre una propagazione di energia (come negli esempi ricordati)

Quindi possiamo dire che parliamo di onde tutte le volte che osserviamo una propagazione di energia a cui non è associata propagazione di materia

Fenomeni ondulatori (2)

Che cos'è dunque che si propaga?

Nelle onde del mare o nelle onde sonore c'è un mezzo che in assenza di onde si trova in uno stato di equilibrio

Se si introduce in un punto una perturbazione di questo stato di equilibrio le forze di richiamo che lo garantiscono tendono a ripristinare la situazione di equilibrio imperturbato

Piccole perturbazioni → oscillazioni intorno alla posizione di equilibrio

Il meccanismo responsabile dell'onda è l'accoppiamento tra il punto che stiamo considerando ed i punti circostanti. In presenza di questo accoppiamento, come abbiamo visto nel caso di due oscillatori accoppiati, l'energia associata all'oscillazione originaria tende a trasferirsi alle componenti più vicine del mezzo e quindi a propagarsi, generando l'onda che si sposta nel mezzo.

Notiamo subito che la presenza del mezzo, molto utile per capire il meccanismo del fenomeno, non è però essenziale: le onde elettromagnetiche si propagano anche nel vuoto!