Costanti del moto (FMUV 9.5)

Campo centrale a simmetria sferica: forza centrale

- Conservazione del momento angolare

$$\vec{p} = \vec{r} \times m\vec{v} = \vec{r} \times m(\dot{r}\hat{r} + r\dot{\vartheta}\hat{\tau}) = mr^2\dot{\vartheta}\hat{k} = mr^2\vec{\omega} \qquad \Rightarrow \vec{\omega} = \frac{\vec{p}}{mr^2}$$

NB: ω non è necessariamente costante

$\hat{p}, \hat{\omega}$ costanti $\rightarrow$ moto piano

velocità areolare costante $\quad \dfrac{dA}{dt} = \dfrac{1}{2}r \cdot r\dfrac{d\vartheta}{dt} = \dfrac{1}{2}r^2\omega$

- Conservazione dell'energia meccanica

$$E = \frac{1}{2}mv^2 + V(r) = \frac{1}{2}mv^2 - G\frac{M_S m}{r}$$

Scomponiamo la velocità in coordinate polari

$$v^2 = \dot{r}^2 + r^2\dot{\vartheta}^2 = \dot{r}^2 + r^2\omega^2$$

$$\boxed{\omega^2 = p^2/m^2r^4}$$

$$E = \frac{1}{2}m(\dot{r}^2 + r^2\omega^2) - G\frac{M_S m}{r} = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + \frac{p^2}{2mr^2} - G\frac{M_S m}{r}$$

Gli ultimi due termini rappresentano una funzione del solo raggio, che prende il nome di potenziale efficace:

$$V_{\text{eff}}(r) = \frac{p^2}{2mr^2} - G\frac{M_S m}{r}$$

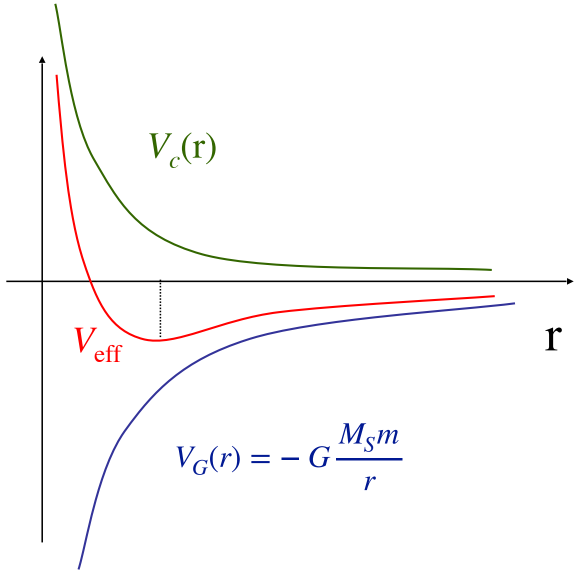
Potenziale efficace

Attraverso il potenziale efficace

$$V_{\mathrm{eff}}(r) = \frac{p^2}{2mr^2} - G\frac{M_S m}{r}$$

la coservazione dell'energia si scrive:

$$E = \frac{1}{2}m\dot{r}^2 + V_{\mathrm{eff}}(r)$$



Come si interpreta?

In un riferimento rotante col pianeta, questo è soggetto alla gravitazione, attrattiva e alla forza centrifuga, repulsiva.

E' facile verificare che V_{eff} rappresenta il potenziale della forza centrifuga:

essendo $f_C = mr\omega^2 = mr\frac{p^2}{m^2r^4} = \frac{p^2}{mr^3}$ $\quad (\omega = \frac{p}{mr^2})$

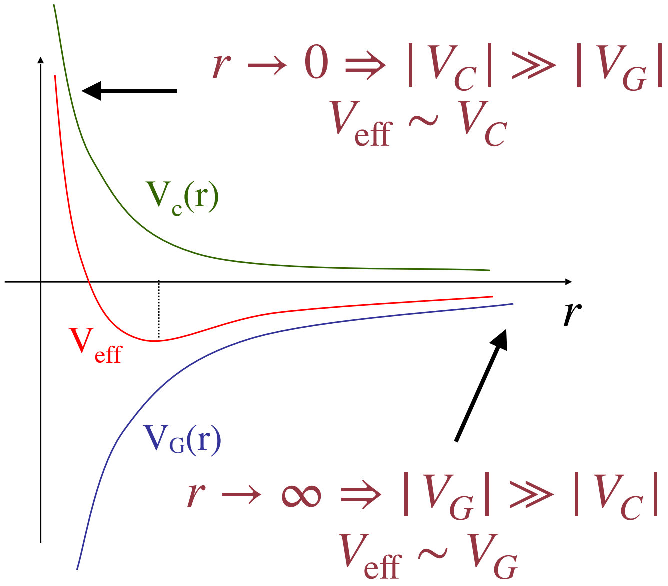
si ha $V_C = -\int f_C dr = -\int \frac{p^2}{mr^3}dr = -\frac{p^2}{m}\int\frac{dr}{r^3} = \frac{1}{2}\frac{p^2}{mr^2}$

Prima legge (qualitativa)

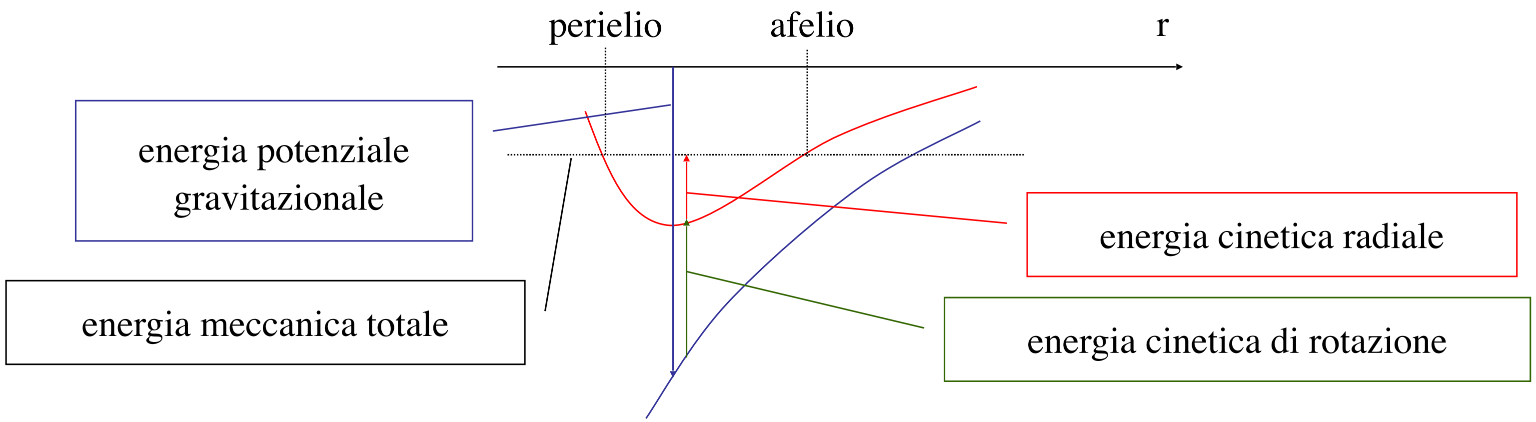
$$|V_C| \sim \frac{1}{r^2}; \quad |V_G| \sim \frac{1}{r}$$

Per piccoli r, domina V_C, per cui il pianeta non può cadere sul Sole, a grandi r domina V_G.

- Se $E > 0$ il sistema non è legato: orbita iperbolica.
- Se $E = 0$ orbita parabolica
- Se $E < 0$ il sistema è legato e il pianeta non può allontanarsi indefinitamente.



- Se E coincide col minimo di V_{eff}, l'orbita è perfettamente circolare, altrimenti il pianeta oscilla tra afelio ($r_{\max}$) e perielio ($r_{\min}$), descrivendo un'orbita ellittica.



Orbite circolari (FMUV 9.6)

Quando l'orbita è circolare $\dot{r} = 0$ (moto circolare uniforme)

$$E = \frac{p^2}{2mr^2} - G\frac{M_S m}{r}$$

e il valore di r corrisponde al minimo del potenziale efficace (equilibrio dinamico):

$$\frac{d}{dr}V_{\text{eff}}(r) = -\frac{p^2}{mr^3} + G\frac{M_S m}{r^2} = 0$$

$$r_{\text{circ}} = \frac{p^2}{GMm^2}$$

inoltre per questo valore si ha:

$$K = \frac{1}{2}mv^2 = \frac{1}{2}m\omega^2 r_{\text{circ}}^2 = \frac{p^2}{2mr_{\text{circ}}^2} = \frac{r_{\text{circ}}GMm^2}{2mr_{\text{circ}}^2} = \frac{1}{2}G\frac{Mm}{r_{\text{circ}}} = -\frac{1}{2}V_G$$

ossia per un'orbita circolare l'energia cinetica è sempre la metà del modulo del potenziale gravitazionale e quindi aumenta al diminuire del raggio:

aumento dell'energia per contrazione: un corpo in rotazione che perde energia (per attrito, irraggiamento ecc.) aumenta paradossalmente la sua energia cinetica

Terza legge per orbite circolari (FMUV 9.4)

Il problema del moto di un pianeta intorno al Sole è un problema di due corpi, con la massa ridotta praticamente coincidente con la massa del pianeta. Il pianeta orbita intorno al Sole sotto l'azione della attrazione gravitazionale:

$$F_G = -\frac{GM_S m}{r^2}$$

Se l'orbita è circolare

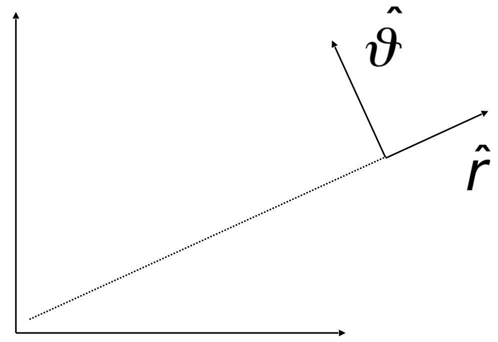
$$\mu a = \mu \frac{v^2}{r} = \mu\omega^2 r = -\frac{GM_S\mu}{r^2} \qquad \text{con} \qquad \omega^2 = \frac{4\pi^2}{T^2}$$

$$\Rightarrow \quad \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2\mu}{GM_S m} \simeq \frac{4\pi^2}{GM_S} = \text{costante}$$

Per un sistema di due corpi rotanti sotto l'azione dell'attrazione gravitazionale con masse m_1 e m_2 confrontabili,

$$\mu a = \frac{m_1 m_2}{m_1 + m_2}\omega^2 r = -G\frac{m_1 m_2}{r^2} \quad \Rightarrow \quad \frac{T^2}{r^3} = \frac{4\pi^2}{G(m_1+m_2)}$$

Prima legge: soluzione analitica (FMUV 9.9)



L'equazione dell'ellisse si può derivare dal secondo principio della dinamica, usando la formula di Poisson per i versori delle coordinate polari:

$$\frac{d\hat{\vartheta}}{dt} = \vec{\omega} \times \hat{\vartheta} = -\omega\hat{r} = -\frac{p}{mr^2}\hat{r} \quad \Rightarrow \quad \hat{r} = -\frac{mr^2}{p}\frac{d\hat{\vartheta}}{dt}$$

$$m\frac{d\vec{v}}{dt} = -\frac{GmM_S}{r^2}\hat{r} = -\frac{\alpha}{r^2}\hat{r} = \frac{m\alpha}{p}\frac{d\hat{\vartheta}}{dt} \quad \Rightarrow \quad \frac{d}{dt}\left(\frac{p}{\alpha}\vec{v} - \hat{\vartheta}\right) = 0$$

La quantità in parentesi rappresenta quindi un vettore costante, che possiamo indicare come

$$\frac{p}{\alpha}\vec{v} - \hat{\vartheta} = e\hat{j}$$

Possiamo valutarne la direzione del vettore al perielio, dove $\hat{v} = \hat{\vartheta} = \hat{j}$ e se moltiplichiamo scalarmente per $\hat{\vartheta}$, avremo una relazione tra la componente radiale di v e l'angolo ϑ:

$$\frac{p}{\alpha}\vec{v} \cdot \hat{\vartheta} - \hat{\vartheta} \cdot \hat{\vartheta} = \frac{p}{\alpha}v_\vartheta - 1 = \frac{p}{\alpha}r\omega - 1 = \frac{p^2}{\alpha m}\frac{1}{r} - 1 = e\cos\vartheta \qquad \left(\omega = \frac{p}{mr^2}\right)$$

che risolta rispetto a $1/r$ è l'equazione parametrica di una conica di eccentricità e:

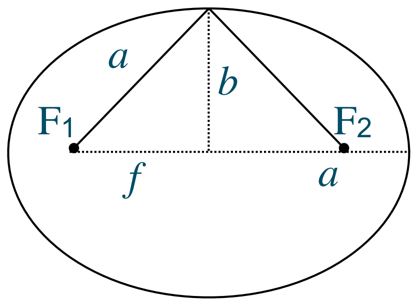
$\dfrac{1}{r} = \dfrac{\alpha m}{p^2}(1 + e\cos\vartheta)$, che può rappresentare una circonferenza ($e = 0$), una ellisse ($0 < e < 1$), una parabola ($e = 1$) o una iperbole ($e > 1$)

Parametri dell'ellisse

Vediamo la relazione tra l'equazione

$$r(1 + e\cos\vartheta) = \frac{p^2}{\alpha m}$$

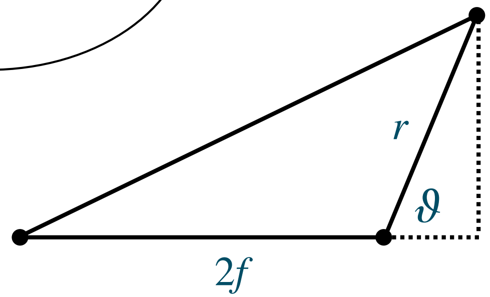
e i parametri di una ellisse.



$$(a+f)+(a-f) = 2a$$

$$e = \frac{f}{a}$$

$$b^2 = a^2 - f^2 = a^2(1-e^2)$$



$$r + \sqrt{(2f + r\cos\vartheta)^2 + r^2\sin^2\vartheta} = 2a$$

$$(2f + r\cos\vartheta)^2 + r^2\sin^2\vartheta = (2a - r)^2$$

$$4f^2 + r^2\cos^2\vartheta + 4fr\cos\vartheta + r^2\sin^2\vartheta = 4a^2 + r^2 - 4ar$$

$$4f^2 + r^2 + 4fr\cos\vartheta = 4a^2 + r^2 - 4ar$$

$$f^2 + fr\cos\vartheta = a^2 - ar$$

$$r(a + f\cos\vartheta) = a^2 - f^2 = b^2$$

$$r(1 + e\cos\vartheta) = \frac{b^2}{a} = \frac{p^2}{\alpha m}$$

perielio $\vartheta = 0$ $\quad r_p = \dfrac{p^2}{\alpha m}\dfrac{1}{1+e}$

afelio $\vartheta = \pi$ $\quad r_a = \dfrac{p^2}{\alpha m}\dfrac{1}{1-e}$

Egidio Longo © Sapienza Università di Roma

Energia ed eccentricità

Per ritrovare la relazione tra energia e forma dell'orbita trovata con le considerazioni qualitative, calcoliamo l'energia totale nel perielio ($\vartheta = 0$), dove l'energia cinetica radiale è nulla:

$$E = V_{\mathrm{eff}} = \frac{p^2}{2mr_p^2} + V_G(r_p) = \frac{p^2}{2mr_p^2} - \frac{\alpha}{r_p} \qquad \frac{p^2}{\alpha m} = r(1 + e\cos\vartheta)$$

$$E = \frac{\alpha m(1+e)r_p}{2mr_p^2} - \frac{\alpha}{r_p} = \frac{\alpha}{2r_p}(e-1) = \frac{\alpha^2 m(1+e)}{2p^2}(e-1) = \frac{\alpha^2 m}{2p^2}(e^2-1)$$

da cui risulta: $e = \sqrt{1 + \dfrac{2p^2 E}{\alpha^2 m}}$

che invertita esprime l'eccentricità in funzione delle costanti del moto, da cui risulta che:

$E < 0 \Rightarrow e < 1$ orbite ellittiche

$E = 0 \Rightarrow e = 1$ orbite paraboliche

$E > 0 \Rightarrow e > 1$ orbite iperboliche

ricordiamo che per $e = 0$ l'orbita è circolare