Uniforme equi-integrabilità e Teorema di Dunford-Pettis

Rif: Brezis (Problemi finali n. 23)

J. Diestel: appunti linkati dalla pg. web.

Supponiamo $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ di misura finita.

DEF $\mathcal{F} \subset L^1(\Omega)$ limitato in $L^1(\Omega)$ si dice **uniformemente equi-integrabile** se

$\forall \varepsilon > 0 \ \exists \delta > 0$ t.c. $\forall E \subset \Omega$ misurabile con $|E| < \delta$

si ha $$\int_E |f|\, dx < \varepsilon \qquad \forall f \in \mathcal{F}$$

PROP. $\mathcal{F}$ limitato in $L^1(\Omega)$. Allora

$\mathcal{F}$ unif^{te} integrabile $\iff$ $\displaystyle \lim_{t \to +\infty} \sup_{f \in \mathcal{F}} \int_{\{|f| > t\}} |f|\, dx = 0$

cioè: $\forall \varepsilon > 0 \ \exists k > 0$ t.c.

$\forall t > k \ \forall f \in \mathcal{F}$

$$\int_{\{|f| > t\}} |f(x)|\, dx < \varepsilon.$$

DIM $\boxed{\Rightarrow}$ Sappiamo che $\forall \varepsilon>0\ \exists \delta$ t.c. etc...

$$|\{|f|>t\}| \le \frac{1}{t}\int_{\{|f|>t\}} |f|\,dx \le \frac{1}{t}\int_{\Omega} |f|\,dx \le \frac{c}{t} < \delta$$

se $t > \frac{c}{\delta} =: k$

$$\int_{\{|f|>t\}} |f|\,dx < \varepsilon$$

ha mis $< \delta$

$\square$

Dim. $\boxed{\Leftarrow}$

$$\int_E |f|\,dx = \underbrace{\int_{E\cap\{|f|\le t\}} |f|\,dx}_{\le\, t|E|\, <\, \frac{\varepsilon}{2}} + \int_{E\cap\{|f|>t\}} |f|\,dx < \varepsilon$$

(2) Fissato t

se $|E| < \frac{\varepsilon}{2t}$

(1) $\le \int_{\{|f|>t\}} |f|\,dx < \frac{\varepsilon}{2}$

se scelgo t grande (ind. da f).

$\square$

TEOREMA di DUNFORD-PETTIS $|\Omega| < \infty$

(1) [$\mathcal{F} \subset L^1(\Omega)$ è relativamente compatto nella topologia debole]

se e solo se

(2) [$\mathcal{F}$ è limitato in L^1 e unif^{te} equi-integrabile]

<u>OSS</u> se $|\Omega| = \infty$, allora bisogna aggiungere la condizione di "tightness", ossia $\forall \varepsilon > 0$ $\exists\ \omega \subset \Omega$, $|\omega| < \infty$ t.c.

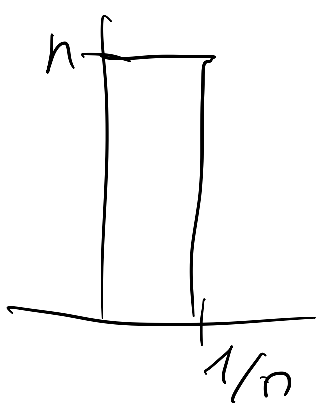
$$\int_{\Omega \setminus \omega} |f|\, dx < \varepsilon \qquad \forall f \in \mathcal{F}$$

<u>OSS</u> Il tipico esempio di $\mathcal{F}$ limitato $L^1(\Omega)$ ma non debolmente compatto è

$$\{f_n\} \subset L^1(0,1) \quad \text{t.c.} \quad f_n(x) = n\,\chi_{(0,\frac{1}{n})}(x)$$

$\|f_n\|_{L^1} = 1$ $\forall n$ ma non convergono debole in L^1.

e infatti non sono equiintegrabili



<u>Conseguenza.</u>

Se $\mathcal{F}$ è limitato non solo in $L^1(\Omega)$ ma anche in $L^p(\Omega)$ $\infty > p > 1$, allora è deb. compatto in L^1.

1) Dim. indiretta passando per la riflessività di L^p.

2) Dim. diretta, passando per Dunford-Pettis.

$$\int_E |f|\,dx \underset{\text{Hölder}}{\leq} \underbrace{\left[\int_E |f|^p dx\right]^{1/p}}_{\leq C} |E|^{1-\frac{1}{p}} \leq C\,|E|^{1-\frac{1}{p}}$$

e quindi basta prendere $|E|$ piccolo perché sia $< \varepsilon$.

Unif^{te} equiint. $\xRightarrow{}$ [Dunford-Pettis] deb. rel. compatto

<u>OSS</u> In realtà basta meno.

Supponiamo che esista una funzione

$$\phi(t) : [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$$

continua, crescente, convessa all'infinito e superlineare all'infinito. $\displaystyle\lim_{t\to+\infty} \frac{\phi(t)}{t} = +\infty$ (per es. $\phi(t) = t^p$, $p>1$)

e se $\displaystyle\int_\Omega \phi(|f|)\,dx \leq M \quad \forall f \in \mathcal{F}$

allora $\mathcal{F}$ è relat. deb. compatto $L^1(\Omega)$.

Per esempio se so che $\int_\Omega \phi(|f|)\,dx \le M \quad \forall f \in \mathcal{F}$

con $\phi(t) = t\log(1+t)$ allora $\mathcal{F}$ è equiint. e quindi Dunford-Pettis ...

Infatti fissato $\varepsilon > 0$ scelgo k t.c. $\forall t > k$

$\frac{\phi(t)}{t} > \frac{M}{\varepsilon}$. Allora

$$\int_{\{|f|>t\}} 1\,|f|\,dx \le \frac{\varepsilon}{M}\int_{|f|>t} \frac{\phi(|f|)}{\cancel{|f|}}\cancel{|f|}\,dx \le \frac{\varepsilon}{\cancel{M}}\cancel{M} = \varepsilon$$

$$\frac{\varepsilon}{M}\frac{\phi(t)}{t} > 1$$

$$\le \int_\Omega \phi(|f|) \le M$$

In realtà è anche una C.N.

<u>Teorema di De La Vallée Poussin</u> $|\Omega|<\infty$

$\mathcal{F} \subset L^1(\Omega)$ è equiintegrabile <u>se e solo se</u>

$\exists\, \phi : [0,+\infty) \longrightarrow [0,+\infty)$ crescente, continua, convessa all'infinito e superlineare $\lim\limits_{t\to+\infty} \frac{\phi(t)}{t} = +\infty$

t.c.

$$\int_\Omega \phi(|f|)\,dx \le M \qquad \forall f \in \mathcal{F}$$

Questo conduce alla teoria degli spazi di Orlicz

Per es.

$$L\log L = \left\{ f \text{ misurabili in } \Omega ; \int |f| \log(1+|f|) < \infty \right\}$$

TEOREMA di EBERLEIN-SMULIAN

X sp. di Banach $A \subset X$. Allora

[A è relativamente compatto in $\sigma(X, X^*)$
cioè $\overline{A}^{\sigma(X,X^*)}$ compatto in $\sigma(X, X^*)$]

se e solo se

[ogni successione $\{x_n\} \subset A$ ammette una sottosucc^{ne} deb. convergente. Ossia:
A è sequenzialmente relativamente compatto in $\sigma(X, X^*)$]

<u>Dim.</u> Dunford - Pettis

$(1) \Rightarrow (2)$

<u>Step 1</u> Se $\mathcal{F}$ è rel. compatto nella top. debole di L^1, allora deve essere limitato in $L^1(\Omega)$

Se non lo fosse, potrei trovare una successione $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ che diverge in norma. Da questa non si può estrarre nessuna sottosucc^{ne} deb. convergente in $L^1(\Omega)$ e quindi per Eberlein-Smulian $\mathcal{F}$ non è deb. relativ. compatto.

<u>Step 2</u> Supponiamo che $\mathcal{F}$ non sia unif^{te} equi-integrabile (per assurdo).

$\exists\, \overline{\varepsilon} > 0$ esiste una succ^{ne} $\{f_n\} \subset \mathcal{F}$ ed una succ^{ne} di insiemi $E_n \subset \Omega$ con

$$|E_n| \to 0 \quad e \quad \int_{E_n} |f_n| \, dx \geq \overline{\varepsilon}$$

Per E-S. posso estrarre una sottosucc^{ne} (che continuo a chiamare $\{f_n\}$) t.c.

$$f_n \rightharpoonup f \quad L^1(\Omega) \text{ debole, cioè}$$

$$\int_\Omega \varphi f_n \, dx \to \int_\Omega \varphi f \, dx \qquad \forall \varphi \in L^\infty(\Omega)$$

In altre parole

$$\int_\Omega \varphi\,(f_n - f)\,dx \to 0 \qquad \forall \varphi \in L^\infty(\Omega)$$

Se prendo $\varphi = \chi_A$ con $A \subset \Omega$ mis.

$$\int_A (f_n - f)\,dx \to 0 \qquad \forall\ A \subset \Omega \text{ mis.}$$

Step 3 TEOREMA di LEBESGUE-VITALI

Se $\{g_n\}$ limitata in $L^1(\Omega)$ e t.c. $\forall A \subset \Omega$ mis.

$$\int_A g_n\,dx \to 0$$

Allora $\{g_n\}$ è unif^{te} equi-integrabile.

Step 4 (conclusione). Per Lebesgue-Vitali

$f_n - f$ equi-integrabili

$$|f_n| \le \underbrace{|f_n - f|}_{\text{equiint.}} + \underbrace{|f|}_{\text{equiint.}} \qquad \text{equiint.}$$

Questo è assurdo per come abbiamo costruito la succ^{ne} $\{f_n\}$.

Dim. del <u>TEOREMA di LEBESGUE-VITALI</u>

Se $\{g_n\}$ limitata in $L^1(\Omega)$ e t.c. $\forall A \subset \Omega$ mis.

$$\int_A g_n \, dx \to 0$$

Allora $\{g_n\}$ è unif^{te} equi-integrabile.

Considero l'insieme

$$X = \{ \chi_A : A \text{ misurabili} \subset \Omega \} \subset L^1(\Omega)$$

è un <u>chiuso</u> di $L^1(\Omega)$

Sia $f_n = \chi_{A_n}$ una successione di X t.c.

$f_n \to f$ L^1, a meno di sottosucc.^{ni} $f_n \to f$ q.o.

Poiché le f_n assumono q.o. i valori 0 o 1, anche f assume solo valori 0, 1 q.o. e quindi $f = \chi_A \in X$.

Quindi X è uno sp. metrico completo con la metrica indotta.

Considero $X_n = \{ \chi_A \in X \text{ t.c. } \left| \int_A g_k \, dx \right| \leq \varepsilon \ \forall k > n \}$

sono chiusi, e inoltre

$$\bigcup_{n \in \mathbb{N}} X_n = X \xRightarrow{[\text{Baire}]} \exists X_{n_0} \text{ che ha interno non vuoto.}$$

$\Rightarrow \quad \exists A_0 \subset \Omega \quad \exists \rho > 0 \quad t.c.$

$$B(A_0, \rho) \subset X_{n_0}$$

cioè

$$A \subset \Omega \text{ mis., t.c. } \underbrace{\int |\chi_A - \chi_{A_0}|\,dx}_{\substack{\shortparallel \\ |A \triangle A_0|}} < \rho \Rightarrow A \in X_{n_0}$$

$A \triangle A_0 = (A \setminus A_0) \cup$
$\cup (A_0 \setminus A)$

cioè $$\left| \int_A g_k\,dx \right| \leq \varepsilon \quad \forall k > n_0.$$

Affermo che se $A \subset \Omega$ misurabile t.c. $|A| < \rho$,
allora $$\int_A |g_k|\,dx \leq 4\varepsilon \quad \forall k > n_0.$$

OSSERVIAMO che un insieme di misura piccola può essere scritto come differenza di due insiemi che "distano poco" da A_0.

preso A t.c. $|A| < \rho$, considero

$$B_1 = A_0 \cup A, \quad B_2 = A_0 \setminus A = B_1 \setminus A$$

$$\int |\chi_{B_1} - \chi_{A_0}| = |(A_0 \cup A) \setminus A_0| \leq |A| < \rho$$

$$\int |\chi_{B_1} - \chi_{A_0}| = |(A_0 \cup A) \setminus A_0| \le |A| < \rho$$

$$\Rightarrow \left| \int_{B_1} g_k \, dx \right| \le \varepsilon \quad \forall k > n_0$$

$$\int |\chi_{B_2} - \chi_{A_0}| = |A_0 \setminus (A_0 \setminus A)| \le |A| < \rho$$

$$\Rightarrow \left| \int_{B_2} g_k \, dx \right| \le \varepsilon \quad \forall k > n_0$$

D'altra parte $A = B_1 \setminus B_2 \Rightarrow$

$$\left| \int_A g_k \, dx \right| = \left| \int_{B_1} g_k \, dx - \int_{B_2} g_k \, dx \right| \le 2\varepsilon \quad \forall k > n_0$$

$$\forall A \text{ t.c. } |A| < \rho$$

$$\int_A |g_k| \, dx = \underbrace{\int_{\underbrace{A \cap \{g_k \ge 0\}}_{\text{ha mis} < \rho}} g_k \, dx}_{\le 2\varepsilon} - \int_{A \cap \{g_k < 0\}} g_k \, dx \le 4\varepsilon$$

Ho trovato che $\forall \varepsilon > 0 \ \exists \rho \ \exists n_0$ t.c.

$\forall A \subset \Omega$ con $|A| < \rho$ $\forall k > n_0$ $\displaystyle\int_A |g_k| \, dx \le 4\varepsilon$

vorrei che fosse $\forall k \in \mathbb{N}$.

Quelle che restano sono un numero finito di funzioni $g_1, g_2, \dots g_{n_0}$

e queste sono sicuramente equi-integrabili.

Ne segue che, eventualmente cambiando ρ.

$\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \rho \quad$ t.c. $\forall A \subset \Omega \quad |A| < \rho$

$$\forall k \in \mathbb{N} \qquad \int_A |g_k| \, dx \leq 4\varepsilon$$

$\Rightarrow$ equi integrabilità uniforme.