Conseguenza di Rellich - Kondrakhov Ω limitato di classe C^1

L'immersione $W^{1,p}(\Omega)$ in $L^p(\Omega)$ è compatta.

Quindi ogni successione debolmente convergente in $W^{1,p}(\Omega)$ converge fortemente in $L^p(\Omega)$

$$u_n \rightharpoonup u \quad W^{1,p}(\Omega) \xRightarrow[\text{estraggo}]{R.K.} u_{n_k} \to v \quad L^p(\Omega)$$

$$\Downarrow$$

$$u_n \rightharpoonup u \quad L^p \text{ debole.}$$

$u = v$.

Poiché questo discorso lo posso ripetere per sottosucc. ho provato che da ogni sottosucc^{ne} di u_n posso estrarre una sottosottosucc^{ne} che converge forte L^p a u

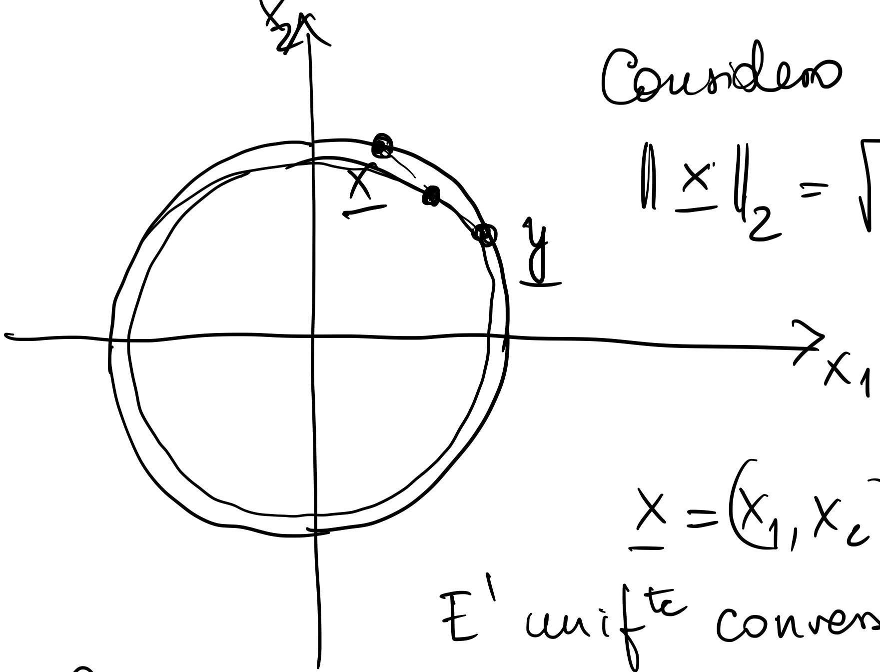
$\Rightarrow$ Tutta la succ^{ne} converge a u fortemente in L^p.

Spazi unif^{te} convessi.

DEF X sp. di Banach si dice unif^{te} convesso se $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ t.c.

$x, y \in X$

$$\|x\| \leq 1,\ \|y\| \leq 1,\ \|x-y\| > \varepsilon \Rightarrow \left\| \frac{x+y}{2} \right\| < 1-\delta.$$



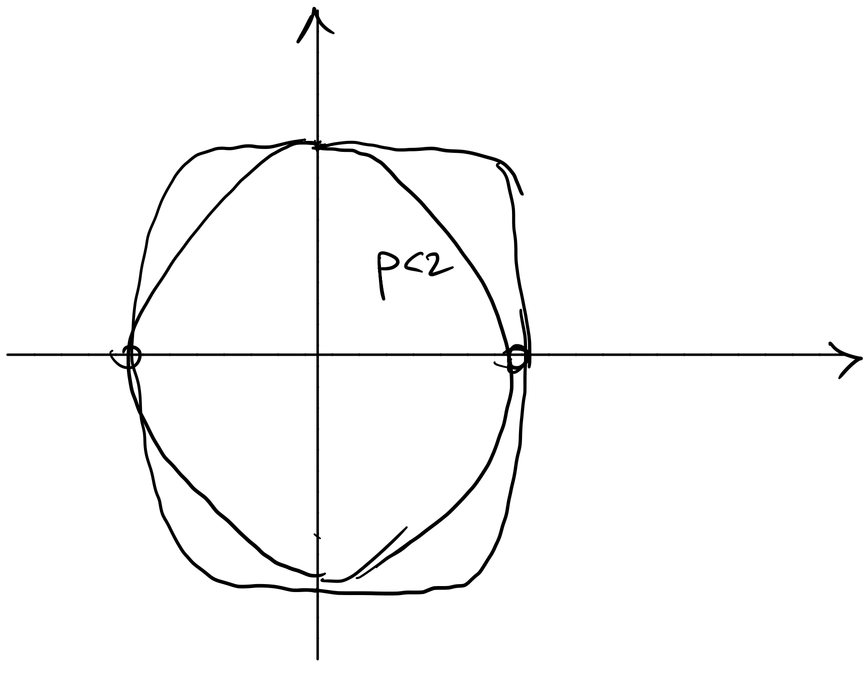
Considero $\mathbb{R}^2$ con la norma

$$\|\underline{x}\|_2 = \sqrt{x_1^2 + x_2^2}$$

$$\underline{x} = (x_1, x_2)$$

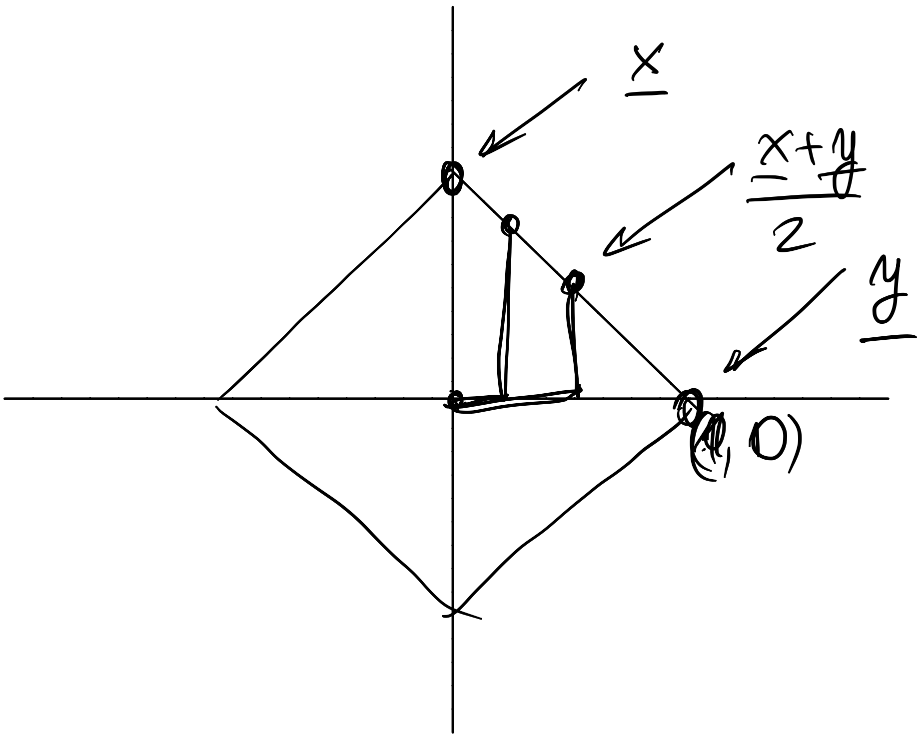
E' unif^{te} convesso. (dim. per esercizio)

Questo è vero anche se in $\mathbb{R}^2$ (o $\mathbb{R}^N$) prendo la norma p con $1 < p < \infty$.



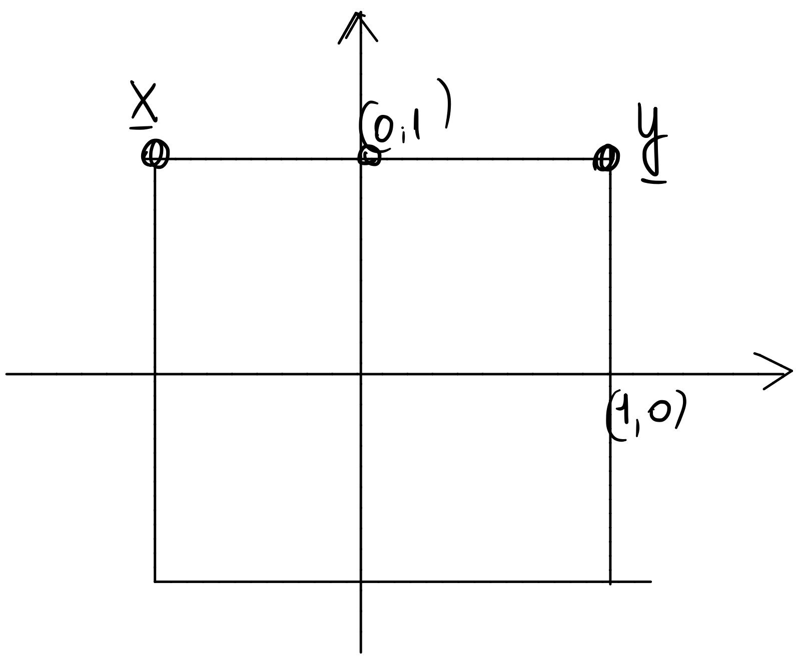
Se prendo $p = 1$.

$$\|\underline{x}\|_1 = \|(x_1, x_2)\|_1 = |x_1| + |x_2|$$



Non è unif^{te} convesso

Stessa cosa con la norma $\|\underline{x}\|_\infty = \max\{|x_1|, |x_2|\}$



TEOREMA (Milman - Pettis).

X sp. di Banach.
Allora se X è unif. convesso, X è riflessivo.

Dim semplice ma non brevissima ($\to$ Brezis).

Gli spazi $\ell^p, L^p(\Omega)$ $\quad 1 < p < \infty$

sono unif^{te} convessi $\quad (\Omega \subset \mathbb{R}^N$ misurabile$)$

La <u>dim</u> non è ovvia (dis. di Clarkson)

$$\left.\begin{array}{l} \text{Gli spazi } \ell^1, L^1(\Omega) \\ \qquad\quad\ \ell^\infty, L^\infty(\Omega) \end{array}\right\} \text{non sono unif}^{te} \text{ convessi.}$$

Altra proprietà rilevante degli sp. unif. convessi

Sappiamo che (X sp. di Banach)

$$x_n \rightharpoonup x \implies \|x\| \le \liminf_n \|x_n\|$$

Negli spazi unif^{te} convessi si ha

$$\left.\begin{array}{l} x_n \rightharpoonup x \\ \|x_n\| \to \|x\| \end{array}\right\} \text{ allora } \quad x_n \to x \text{ forte}$$

TEOREMA X sp. di Banach unif^{te} convesso.

$$x_n \rightharpoonup x \quad \sigma(X, X^*)$$

$$\|x\| \ge \limsup_n \|x_n\| \qquad (\text{e quindi } \|x_n\| \to \|x\|)$$

Allora $x_n \to x$ forte in X.

Dim Per ipotesi $x_n \rightharpoonup x$, $\|x_n\| \to \|x\|$.

Se $x = 0$ è ovvio

Se $x \neq 0$, prendo

$$y_n = \frac{x_n}{\|x_n\|} \qquad\qquad y = \frac{x}{\|x\|}$$

oss. def^{te} $\neq 0$.

OSS $y_n \rightharpoonup y$. Infatti se $f \in X^*$

$$\langle f, y_n \rangle = \frac{\langle f, x_n \rangle}{\|x_n\|} \longrightarrow \frac{\langle f, x \rangle}{\|x\|} = \langle f, y \rangle \quad \square$$

Mostriamo che $y_n \to y$ forte.

Se facciamo questo abbiamo finito, infatti

$$\|x_n - x\| = \big\| \|x_n\| y_n \underbrace{- \|x_n\| y + \|x_n\| y}_{} - \|x\| y \big\| \leq$$

$$\leq \underbrace{\|x_n\|}_{\leq C} \underbrace{\|y_n - y\|}_{\to 0} + \underbrace{\big|\|x_n\| - \|x\|\big|}_{\to 0} \|y\| \to 0.$$

Se fosse $y_n \not\to y$, posso supporre (estraendo una sottosucc^ne^) $\|y_n - y\| > \varepsilon > 0$

$$\left.\begin{array}{l} \|y_n\| = 1 \quad \|y\| = 1 \\ \|y_n - y\| > \varepsilon \end{array}\right| \Longrightarrow \left\| \frac{y_n + y}{2} \right\| < 1 - \delta$$

D'altra parte $\frac{y_n + y}{2} \rightharpoonup y$

$$\Downarrow$$

$$1 = \|y\| \leq \liminf_n \left\| \frac{y_n + y}{2} \right\| \leq \limsup_n \left\| \frac{y_n + y}{2} \right\| \leq$$

$$\leq 1 - \delta$$

Assurdo.

Spazi di Hilbert

Spazi dotati di prodotto scalare:

X sp. vettoriale, si dice **prodotto scalare su X** un'applicazione

$$(\cdot,\cdot) : X^2 \to \mathbb{R} \quad \text{che sia:}$$

- bilineare (lineare rispetto al 1° e al 2° argomento)
- simmetrica $(x,y) = (y,x)$
- positiva $(x,x) \geq 0 \quad \forall x \in X$

$$= 0 \iff x = 0$$

Si verifica che $\|x\| = \sqrt{(x,x)}$ è una norma.
Va solo provata la dis. triangolare

<u>PROP</u> (dis. di Cauchy-Schwarz)

$$|(x,y)| \leq \sqrt{(x,x)}\,\sqrt{(y,y)} = \|x\|\,\|y\|.$$

<u>Dim</u>

$$(x,y)^2 \overset{?}{\leq} (x,x)\,(y,y)$$

$$\varphi(t) = (x+ty; x+ty) \geq 0 \qquad \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$(x,x) + 2t(x,y) + t^2(y,y) \geq 0 \quad \forall t \in \mathbb{R}.$$

$$\Rightarrow \Delta \leq 0 \qquad (x,y)^2 \leq (x,\cancel{x})(y,y) \qquad \square$$

DIS. TRIANGOLARE

$$\|x+y\| \le \|x\| + \|y\| \qquad \forall x,y \in X.$$

Dim

$$\underbrace{\|x+y\|^2}_{= (x+y,\, x+y)} \overset{?}{\le} (\|x\|+\|y\|)^2$$

$$\cancel{\|x\|^2} + \cancel{\|y\|^2} + 2(x,y) \overset{?}{\le} \cancel{\|x\|^2} + \cancel{\|y\|^2} + 2\|x\|\|y\|$$

E' la dis. di Cauchy-Schwarz. OK.

Se lo spazio normato così ottenuto è completo, X si chiama sp. di Hilbert

Es. di Spazi di Hilbert:

$\mathbb{R}^N$ con il prodotto $(\underline{x}, \underline{y}) = \sum_{i=1}^{N} x_i y_i$

$L^2(\Omega)$ con il prodotto scalare

$$(f,g)_{L^2} = \int_\Omega f(x)\, g(x)\, dx$$

$W^{1,2}(\Omega) = H^1(\Omega)$ con il prodotto

$$(f,g)_{H^1} = (f,g)_{L^2} + \sum_{i=1}^{N} (f_{x_i}, g_{x_i})_{L}$$

$$= \int_\Omega f g\, dx + \int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g\, dx$$

$W_0^{1,2}(\Omega) = H_0^1(\Omega)$ con lo stesso prodotto oppure, se Ω è limitato, con il prodotto

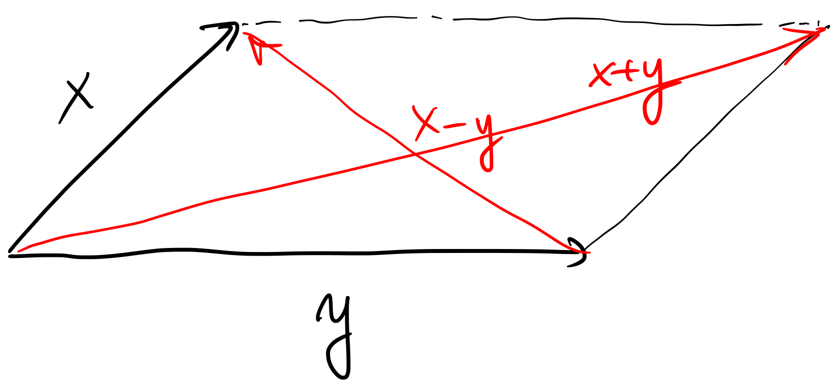
$$(f,g) = \int_\Omega \nabla f \cdot \nabla g \, dx$$

che genera una norma equivalente alla precedente per Poincaré.

Negli sp. di Hilbert vale l'identità del parallelogramma

$$\left\|\frac{x+y}{2}\right\|^2 + \left\|\frac{x-y}{2}\right\|^2 = \frac{1}{2}\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 = 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$



Anzi si dimostra che se uno sp. di Banach verifica l'identità del parallelogramma allora è uno spazio di Hilbert.

Dim

$$\|x+y\|^2 + \|x-y\|^2 \overset{?}{=} 2\left(\|x\|^2 + \|y\|^2\right)$$

$$\cancel{\|x\|^2} + \cancel{\|y\|^2} + \cancel{2(x,y)} + \cancel{\|x\|^2} + \cancel{\|y\|^2} - \cancel{2(x,y)} \overset{?}{=}$$

$$= 2\left(\cancel{\|x\|^2} + \cancel{\|y\|^2}\right) \qquad \square$$

$$\|x+y\|^2 = \|x\|^2 + \|y\|^2 + 2(x,y)$$

$$(x,y) = \frac{1}{2}\left(\|x+y\|^2 - \|x\|^2 - \|y\|^2\right)$$

TEOR. Uno sp. di Hilbert è unif.^{te} convesso, quindi riflessivo.

Dim

$$\|x\| \le 1 \ , \ \|y\| \le 1, \ \|x-y\| > \varepsilon .$$

Id. del parallelogramma $\Rightarrow$

$$\frac{\|x+y\|^2}{4} = \underbrace{\frac{1}{2}\|x\|^2}_{\le 1/2} + \underbrace{\frac{1}{2}\|y\|^2}_{\le 1/2} \underbrace{- \frac{\|x-y\|^2}{4}}_{\le -\frac{\varepsilon^2}{4}} \le 1 - \frac{\varepsilon^2}{4}$$

$$\left\| \frac{x+y}{2} \right\| \le \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} =: 1 - \delta$$

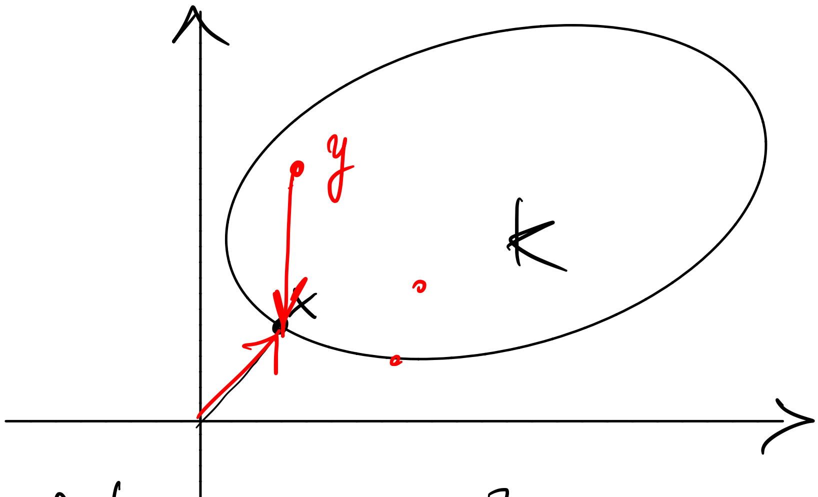
$$\delta = 1 - \sqrt{1 - \frac{\varepsilon^2}{4}} > 0$$

TEOREMA

H spazio di Hilbert

$K \subset H$ convesso, chiuso non vuoto.

Allora K ammette un unico pto x di norma minima. Inoltre x è caratterizzato dalla dis. $(x, x-y) \leq 0 \quad \forall y \in K$.



DIM. Sia $\delta = \inf \{ \|x\|, \ x \in K \}$

Mostrare che $\exists!\ x \in K$ t.c. $\|x\| = \delta$.

OSS $\forall x, y \in K$ per l'ident. del parallelogramma

$$\|x-y\|^2 = 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - \left\|\underbrace{\frac{x+y}{2}}_{\in K}\right\|^2 4 \leq$$

$$\leq 2\|x\|^2 + 2\|y\|^2 - 4\delta^2$$

Unicità del pto di minimo.

Siano $x, y \in K$ t.c. $\|x\| = \|y\| = \delta$

$$\|x-y\|^2 \leq 2\underbrace{\|x\|^2}_{=\delta^2} + 2\underbrace{\|y\|^2}_{=\delta^2} - 4\delta^2 = 0.$$

$\Longrightarrow \quad x = y.$

<u>Esistenza</u> Sia $\{x_n\}$ una succ^{ne} minimizzante

$x_n \in K$, $\|x_n\| \longrightarrow \delta$.

Voglio provare che $\{x_n\}$ converge

se $x_n \longrightarrow x$, allora $x \in K$ perché K chiuso

$$\underset{\substack{\downarrow \\ \delta}}{\|x_n\|} \longrightarrow \|x\| \quad \Longrightarrow \quad \|x\| = \delta.$$

Basta provare che $\{x_n\}$ è di Cauchy.

$$\|x_n - x_m\|^2 \leq 2\underset{\substack{\downarrow \\ 2\delta^2}}{\|x_n\|^2} + \underset{\substack{\downarrow \\ 2\delta^2}}{2\|x_m\|^2} - 4\delta^2 \to 0$$

Quindi $\|x_n - x_m\|^2$ è piccolo se n, m grandi.

Caratterizzazione $\quad x \in K$

$$\|x\| = \delta \iff (x, x-y) \le 0 \quad \forall y \in K.$$

$\boxed{\Leftarrow}$ ovvio

$$(x, x-y) \le 0$$

$$\Rightarrow \quad \|x\|^2 \le (x,y) \overset{C.S.}{\le} \|x\|\|y\|.$$

$$\Rightarrow \quad \|x\| \le \|y\| \qquad \forall y \in K.$$

$\Rightarrow \|x\|$ è minima.

$\boxed{\Rightarrow}$ se $\|x\|$ è minimo, allora $\forall y \in K$,

$$\forall t \in [0,1] \qquad (1-t)x + ty \in K$$

$$\|x\|^2 \le \|(1-t)x + t y\|^2 = \qquad \forall t \in [0,1].$$

$$= (1-t)^2\|x\|^2 + t^2\|y\|^2 + 2t(1-t)(x,y).$$

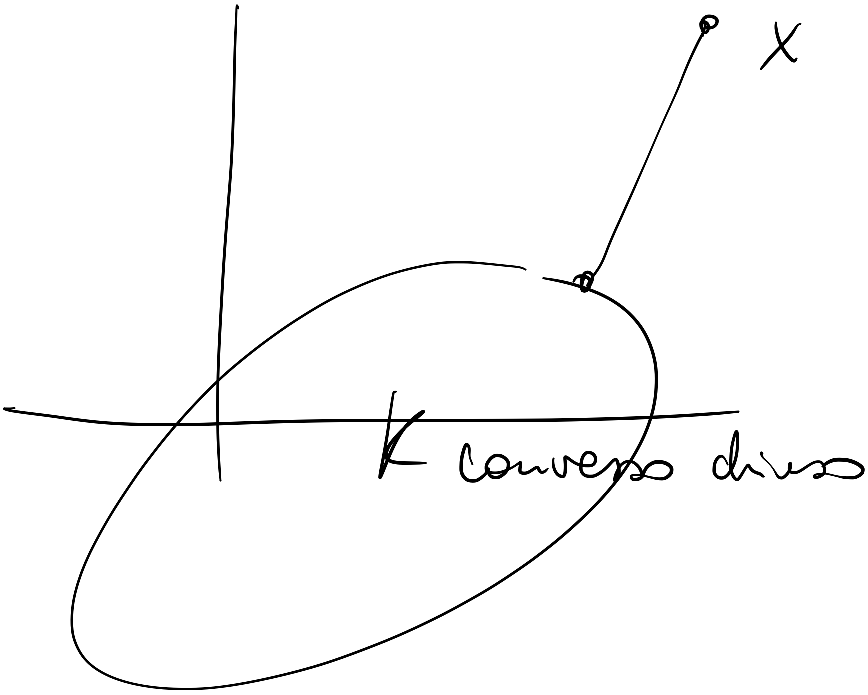
$$0 \le -2t\|x\|^2 + t^2\|x\|^2 + t^2\|y\|^2 + 2t(1-t)(x,y)$$

divido per t

$$0 \le -2\|x\|^2 + t\|x\|^2 + t\|y\|^2 + 2(1-t)(x,y)$$

Faccio $t \to 0$ $\qquad \forall t \in [0,1]$

$$0 \le -2\|x\|^2 + 2(x,y) \Rightarrow (x, x-y) \le 0$$


x
K convesso chiuso

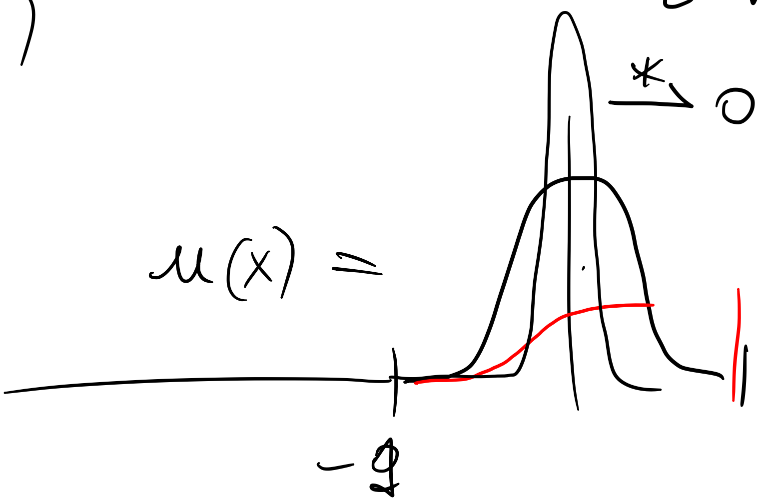
Succ^{ni} che convergono debolmente in $W^{1,p}(\Omega)$ ma non fortemente.

1) $\Omega = (0,1)$

$u_n(x) = \frac{1}{n}\sin(nx) \xrightarrow{L^\infty(0,1)} 0$ $\qquad$ $u_n'(x) = \cos(nx) \to 0$ L^p $\forall p<\infty$

$\xrightarrow{*} 0$ L^∞

2) $\Omega = (-1,1)$ $\qquad$ $u(x) =$

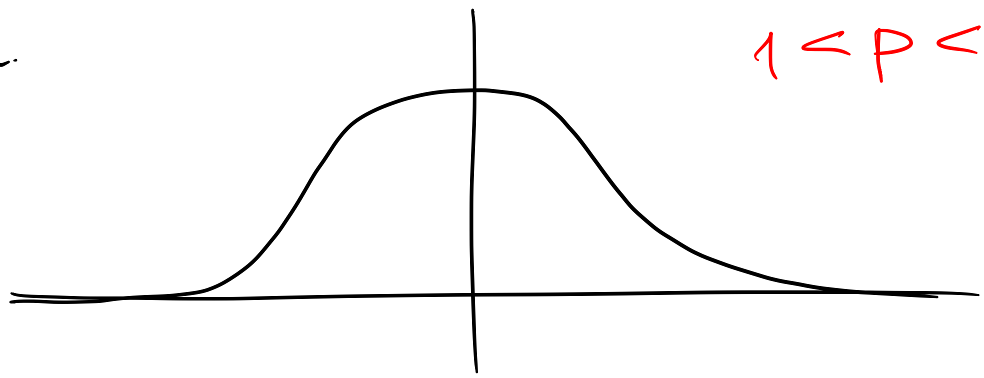


$u_n'(x) = n^{1/p}\, u(nx)$

$u_n(x) = \int_0^x u_n'(t) \longrightarrow 0 \quad W^{1,p}(\Omega)\ \forall p > 1.$

3) $\Omega = \mathbb{R}$. $\qquad$ $1 < p < \infty$

$v(x) =$



$\|v\|_{L^p(\mathbb{R})} = 1$

$v_n(x) = \frac{1}{n^{1/p}}\, v\left(\frac{x}{n}\right)$

$\frac{x}{n} = y \qquad \frac{dx}{n} = dy$

$\|v_n\|_p^p = \frac{1}{n}\int_{\mathbb{R}} \left|v\left(\frac{x}{n}\right)\right|^p dx = \int_{\mathbb{R}} |v(y)|^p\, dy = 1$

Mostro che $v_n \rightharpoonup 0 \quad W^{1,p}(\mathbb{R})$.

significa $v_n \rightharpoonup 0 \quad L^p$

$v_n' \rightharpoonup 0 \quad L^p$. anzi, forte!

$$v_n'(x) = \frac{1}{n^{1/p}} \frac{1}{n} v'\left(\frac{x}{n}\right) = \frac{1}{n^{1/p+1}} v'\left(\frac{x}{n}\right)$$

$$\|v_n'(x)\|_p^p = \frac{1}{n^{1+p}} \int_{\mathbb{R}} \left|v'\left(\frac{x}{n}\right)\right|^p dx = \left(y = \frac{x}{n}\right)$$

$$= \frac{1}{n^p} \int |v'(y)|^p \, dy = \frac{c}{n^p} \to 0 .$$

Per mostrare che $v_n \rightharpoonup 0 \quad L^p$ debole

v_n limitata in $L^p \Rightarrow$ estraggo una sottosucc^{ne}

t.c. $v_n \rightharpoonup w$ debole $L^p(\mathbb{R})$

$\Rightarrow v_n \rightharpoonup w$ debole $L^p((a,b))$ a,b limitati

$v_n \to 0$ unif.te in (a,b)

$\Rightarrow w = 0$ in (a,b) $\forall (a,b)$

$w = 0$ q.o. in $\mathbb{R}$.

In definitiva

$v_n \rightharpoonup 0$ debole $L^p(\mathbb{R})$

$v_n' \to 0$ forte $L^p(\mathbb{R})$.

<u>OSS</u> In $\mathbb{R}$ non vale Rellich-Kondrachov.

$v_n \rightharpoonup 0$ $W^{1,p}(\mathbb{R})$ ma non converge forte L^p.

Esercizio

$E \subset \mathbb{R}^N$ misurabile

- f_n, f, g_n, g misurabili in E
- $f_n \to f$ q.o. in E
- $\|f_n\|_\infty \leq K$.
- $g_n \to g$ $L^1(E)$ debole

Mostrare che $\int_E f_n g_n \, dx \longrightarrow \int_E fg \, dx$.

OSS Il risultato sembra sorprendente perché $f_n \not\to f$ in L^∞ forte.

Anche supponendo E limitato

$$\left.\begin{array}{l} f_n \to f \text{ q.o.} \\ \|f_n\|_\infty \leq C \end{array}\right| \Longrightarrow f_n \to f \quad L^p(E) \quad \forall p < \infty.$$

$\int_E |f_n - f|^p \to 0$ per c.d.

ma $f_n \not\to f$ L^∞.

$f_n \longrightarrow f$ $* - L^\infty$.

Dim. Possiamo supporre $g=0$

Altrimenti si prende $g_n - g$

Dunford-Pettis $\Rightarrow$

se $g_n \rightharpoonup 0$ L^1 deb $\Rightarrow$ 1) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists$ $F \subset E$ di misura finita t.c.

$$\int_{E \setminus F} |g_n|\,dx < \varepsilon \quad \forall n.$$

2) $\forall \varepsilon > 0$ $\exists \delta > 0$ t.c. $\forall A \subset E$ con $|A| < \delta$

$$\int_A |g_n|\,dx < \varepsilon.$$

TEOR. di Egorov. $f_n \to f$ q.o. in F di misura finita

allora $\forall \delta$ $\exists G \subset F$ t.c. $|G| < \delta$ t.c.

su $F \setminus G$ $f_n \longrightarrow f$ unif^{te}

$$\int_E f_n g_n = \int_F f_n g_n + \underbrace{\int_{E \setminus F} f_n g_n}_{\text{in valore assoluto}}$$

di misura finita

$$\int_F f_n g_n = \underbrace{\int_{F\setminus G} f_n g_n}_{\substack{f_n \to f \text{ unif}^{te} \\ L^\infty(F\setminus G)}} + \underbrace{\int_G f_n g_n}$$

$$\left|\int_{E \setminus F} f_n g_n\right| \leq \|f_n\|_\infty \int_{E\setminus F} |g_n| < K\varepsilon$$

$$\left|\int_G f_n g_n\right| \leq K \int_G |g_n| < K\varepsilon \quad \text{se } |G| < \delta.$$

$$\underbrace{g_n \to 0 \quad L^1(F \setminus G)}$$

$$\Downarrow$$

$$0$$

Esercizio più facile.

E di misura finita $\quad 1 < p < \infty$.

- $f_n \to f$ q.o. in E
- $\|f_n\|_{L^r(E)} \le C \quad$ per un certo $r > p'$.
- $g_n \to g \quad$ in $L^p(E)$

Allora $\int_E f_n g_n \to \int_E fg$.

In due modi:

1) mostrare che $f_n \to f$ forte $L^{p'}$.
2) usando il risultato precedente per $T_k(f_n)$ con k opportuno.