# Equazioni di Eulero (appunti)

$$\vec{P}_C \equiv (I_u\omega_u, I_v\omega_v, I_w\omega_w)$$

Se vogliamo utilizzare la precedente espressione nella IIa eq. cardinale, dobbiamo tenere conto che questa è valida in un riferimento inerziale, mentre il rif. $\hat{u}, \hat{v}, \hat{w}$ non lo è.

Possiamo però applicare la trasformazione della derivata di un vettore tra due riferimenti in rotazione uno rispetto all'altro (FMU 3.24.1):

$$\left.\frac{d\vec{a}}{dt}\right|_S = \left.\frac{d\vec{a}'}{dt}\right|_{S'} + \vec{\omega} \times \vec{a}'$$

per cui la II eq. cardinale diventa:

$$\vec{M}^{(e)} = \frac{d\vec{P}_{\text{inerziale}}}{dt} = \frac{d\vec{P}_{\text{solidale}}}{dt} + \vec{\omega} \times \vec{P}_{\text{solidale}} \text{ con } \vec{P}_{\text{solidale}} \equiv (I_u\omega_u, I_v\omega_v, I_w\omega_w)$$

Le tre componenti dell'equazione sono quindi:

$$M_u^{(e)} = I_u\frac{d\omega_u}{dt} + \omega_v I_w \omega_w - \omega_w I_v \omega_v = I_u\frac{d\omega_u}{dt} + (I_w - I_v)\omega_v\omega_w$$

$$M_v^{(e)} = I_v\frac{d\omega_v}{dt} + (I_u - I_w)\omega_u\omega_w$$

$$M_w^{(e)} = I_w\frac{d\omega_w}{dt} + (I_v - I_u)\omega_u\omega_v$$

e sono dette equazioni di Eulero, che accoppiano tra di loro le componenti e le derivate della velocità di rotazione del solido

# Tensore d’inerzia per un solido con un asse di simmetria

Se il solido è simmetrico rispetto ad un asse (giroscopio o trottola simmetrica), questo sarà anche un asse centrale d’inerzia.

I due momenti d’inerzia per assi ortogonali a quello di simmetria saranno uguali per la simmetria del corpo: $I_u \neq I_v = I_w$ e la prima quazione di Eulero si ridurrà a

$$M_u^{(e)} = I_u \frac{d\omega_u}{dt} + (I_w - I_v)\omega_v\omega_w = I_u \frac{d\omega_u}{dt}$$

Questa equazione è quindi completamente disaccoppiata, e può essere utilizzata direttamente per calcolare la variazione di $I_u\omega_u$, ossia della proiezione del momento angolare su $\hat{u}$.

Le altre due equazioni sono sempre accoppiate tra loro, per cui la variazione del momento angolare assiale rispetto a $\hat{v}$ o $\hat{w}$ dipende anche dalla rotazione intorno agli altri due assi:

$$M_v^{(e)} = I_v \frac{d\omega_v}{dt} + (I_u - I_w)\omega_u\omega_w$$

$$M_w^{(e)} = I_w \frac{d\omega_w}{dt} + (I_v - I_u)\omega_u\omega_v$$

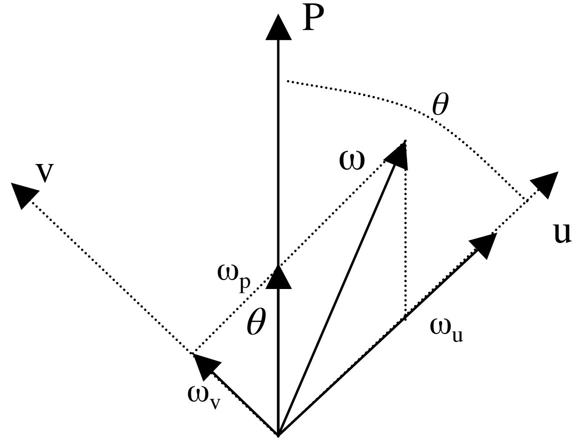
# Trottola simmetrica libera (appunti)

In assenza di forze esterne, il momento angolare si deve mantenere costante in modulo e in direzione.

Inoltre dalla prima eq. di Eulero $M_u^{(e)} = I_u \dot{\omega}_u$ si ricava immediatamente che per $M_u^e = 0$ anche la proiezione $P_u$ si deve mantenere costante, e quindi

$$\dot{\omega}_u = 0 \quad \Rightarrow \quad \omega_u = \frac{p_u}{I_u} = \frac{p\cos\vartheta}{I_u} = \text{costante}$$

e quindi anche l'angolo $\vartheta$ si mantiene costante.

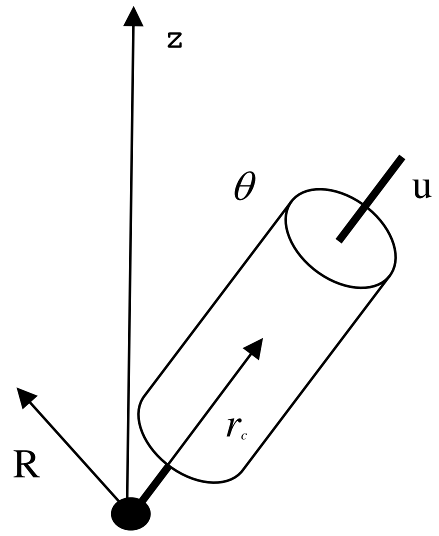



Sfruttando la simmetria cilindrica, possiamo scegliere $v$ sul piano di $P$ e $\omega_u$, in modo che $w$ sia ortogonale a $P$, per cui $P_w = I_w \omega_w = 0 \Rightarrow \omega_w = 0$. La rotazione complessiva del solido si può quindi scomporre in una rotazione intorno a $u$ e una intorno a $v$, che complessivamente producono una rotazione intorno a $P$. La velocità di precessione $\omega_p$ (rotazione del solido intorno a $P$) si ottiene dalla relazione geometrica

$$\sin\vartheta\,\omega_p = \omega_\nu = \frac{P_\nu}{I_\nu} \quad \Rightarrow \quad \omega_p = \frac{P_\nu}{I_\nu \sin\vartheta} = \frac{P}{I_\nu}$$

L'effetto della precessione dell'asse di rotazione rispetto a $P$ può essere facilmente osservato con una palla ovale da rugby o con un frisbee.

# Trottola simmetrica intorno a un punto fisso (appunti)




Abbiamo già visto che in questo caso il momento della gravità tende a far ruotare l'asse $u$ intorno alla verticale (precessione).

Supponiamo che la velocita di precessione sia piccola rispetto alla velocità di rotazione.

Questo vuol dire che per parecchie rotazioni il momento angolare rimane quasi costante, ossia che l'effetto del momento della gravità è trascurabile.

Il giroscopio si comporterà quindi come se fosse libero, e se $P$ ed $u$ non sono allineati, ci sarà quindi una rotazione di $u$ intorno a $P$ che si mantiene praticamente costante (nutazione). Come abbiamo visto, la velocità di rotazione intorno ad $u$ sarà $\omega_n = P/I_\nu$

Se anche la nutazione è rapida rispetto alla precessione, per valutare il momento della gravità possiamo considerare la posizione media del c.d.m.

$$< \vec{r}_C > \simeq r_C \cos\alpha \overrightarrow{P} / P$$

dove $\alpha$ è l'angolo (costante) tra $P$ e $u$. Se $\alpha$ è piccolo (ossia se la nutazione è praticamente assente) possiamo porre $\cos\alpha \simeq 1$.

# Trottola simmetrica intorno a un punto fisso (2)

A questo punto ci ritroviamo nelle condizioni che abbiamo già esaminato in precedenza, quando avevamo ricavato la velocità di precessione

$$\omega_p \simeq \frac{r_C \cos\alpha Mg}{P} \simeq \frac{r_C Mg}{I_u \omega_u}$$

dove la prima approssimazione è per una nutazione veloce rispetto alla precessione, mentre la seconda vale solo se $\cos\alpha \simeq 1$ (nutazione trascurabile) e $P \simeq I_u \omega_u$, (rotazione veloce rispetto alla precessione).

Confrontiamo ora le tre velocità angolari:

$$\omega_u \simeq \frac{P}{I_u}; \quad \omega_n = \frac{P}{I_\nu}; \quad \omega_p = \frac{r_C \cos\alpha Mg}{P}$$

vediamo che le prime due sono proporzionali a $P$, mentre la terza è inversamente proporzionale ad esso.

Le condizioni poste nella ricerca della soluzione (velocità di precessione piccola rispetto alle altre due) si ottengono (a parità degli altri parametri) aumentando il momento angolare (in pratica, la velocità di rotazione attorno ad $u$). Si parla in questo caso di “trottola veloce”.

# Energia di un corpo rigido e elissoide di inerzia

Abbiamo già visto che l'energia di un corpo rigido può essere sempre scritta come

$$K = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2$$

Si può dimostrare che se si sceglie una terna di assi principali, l'energia di rotazione si può scrivere nella forma:

$$K_{\text{rot}} = \frac{1}{2}(I_u\omega_u^2 + I_v\omega_v^2 + I_w\omega_W^2) = \frac{1}{2}\left(\frac{P_u^2}{I_u} + \frac{P_v^2}{I_v} + \frac{P_w^2}{I_w}\right)$$

Per un corpo rigido isolato questa energia si deve conservare, e l'equazione rappresenta la superficie di un elissoide di semiassi

$$\sqrt{2K_{\text{rot}}I_u};\quad \sqrt{2K_{\text{rot}}I_v};\quad \sqrt{2K_{\text{rot}}I_w}$$

detto elissoide d'inerzia, definito per un corpo anche asimmetrico.

La conservazione del momento angolare rappresenta una sfera:

$$P_u^2 + P_v^2 + P_w^2 = P^2$$

e fissati $P$ e $K$, le intersezioni dei due solidi danno il luogo dei possibili orientamenti degli assi compatibili con entrambe le conservazioni.

# Moti giroscopici (FMUV 8.14)

La conservazione del momento angolare di un corpo libero è sfruttata nel giroscopio propriamente detto, cioè lo strumento che consente di mantenere una direzione, come nei sistemi di guida automatica dei velivoli o nella stabilizzazione dei natanti (girostato).

Anche la direzione dell'asse di rotazione terrestre si mantiene costante per la conservazione del momento angolare. Tuttavia la forma schiacciata ai poli rende diversa l'attrazione del Sole sui due emisferi, generando un momento piccolo ma diverso da zero (precessione degli equinozi, ciclo di 26000 anni).

Nel fenomeno complessivo deve essere incluso anche il contributo della Luna, la cui orbita si svolge su un piano diverso rispetto a quella della Terra e con un periodo diverso. La combinazione degli effetti dà luogo a nutazioni molto più rapide (la principale di 18.6 anni per il contributo del diverso piano dell'orbita).

L'effetto della precessione dell'asse di rotazione rispetto a $P$ può essere facilmente osservato con la palla da rugby o con un frisbee.

# Leggi di Keplero (FMUV 9.1, 9.4)

Le leggi di Keplero:

1. le orbite dei pianeti sono ellissi col Sole in uno dei fuochi
2. il raggio vettore spazza aree uguali in tempi uguali
3. i quadrati dei periodi di rivoluzione sono proporzionali ai cubi dei raggi (semiassi maggiori)

sono fondate sul modello copernicano (Copernico 1473-1543)* e basate su misure sperimentali (Brahe 1546-1601, Keplero 1571-1630), ricondotte da Newton (1642-1727) alla legge di gravitazione universale (primo esempio di unificazione delle leggi fisiche).

Trascurando l'influsso degli altri pianeti, il problema si può ricodurre ad un problema a due corpi nel quale, dati i valori delle masse, la massa ridotta coincide con la massa del pianeta e il Sole è praticamente fermo.

* Galileo (1564-1642) aderisce al modello copernicano intorno al 1597