Colpire una palla da biliardo (FMUV 2a ed. es. 8.31, 1a 8.26)

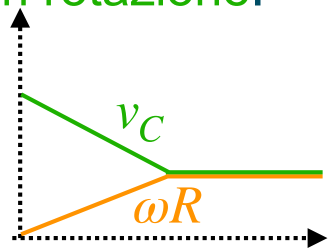
Le considerazioni precedenti si applicano al colpo della stecca sulla palla da biliardo, che può colpire la palla ad una quota maggiore, uguale o minore di quella del c.d.m.

Se il colpo è perfettamente centrale, il c.d.m. si muoverà in avanti con velocità $v_C = J/m$, ma la palla non entrerà istantaneamente in rotazione, essendo nullo il momento delle forze impulsive esterne.

Subito dopo, però, l'attrito radente del tappeto, esercitando una forza e un momento costanti, rallenterà la palla e al tempo stesso la metterà in rotazione.

Poiché ω aumenta mentre v diminuisce, entrambe linearmente,

$$v_C(t) = \frac{J}{m} - \mu_d g t \qquad \omega(t) = \frac{R\mu_d mg}{I} t$$



ad un certo istante si raggiungerà la condizione di puro rotolamento: $v_c = \omega R$

In quello stesso istante, il punto d'appoggio sarà fermo, passando dalla condizione di attrito dinamico a quella di attrito statico, e necessariamente questa condizione si manterrà per tutta l'evoluzione successiva del moto.

Se la stecca colpisce la palla più in alto o più in basso, impartirà inizialmente anche una rotazione, con una dinamica analoga.

Manifestazioni della conservazione del momento angolare

In un sistema non soggetto a momenti di forze esterne, il momento angolare si deve conservare. Questa condizione si presenta anche per un corpo libero soggetto alla forza peso, che equivale ad una forza applicata al c.d.m., di momento nullo rispetto ad esso.

Se il sistema è in rotazione rispetto ad un asse centrale d'inerzia ed è possibile una ridistribuzione delle masse attraverso forze interne, con conseguente variazione del momento di inerzia, si avrà in conseguenza una variazione della velocità di rotazione per mantenere costante il momento angolare:

$$I\omega = I'\omega' \quad \Rightarrow \quad \omega' = \omega\frac{I}{I'} \qquad I' < I \quad \Rightarrow \omega' > \omega$$

Il fenomeno è sfruttato in alcune attività acrobatiche:

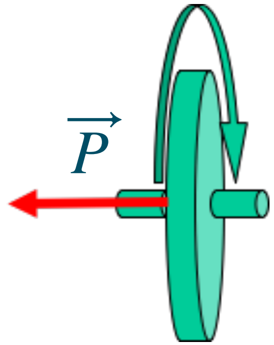
- tuffo dal trampolino:

  l'atleta aumenta la velocità di rotazione raccogliendo braccia e gambe, per poi ridistenderle al momento dell'impatto con l'acqua.

- piroetta del pattinatore:

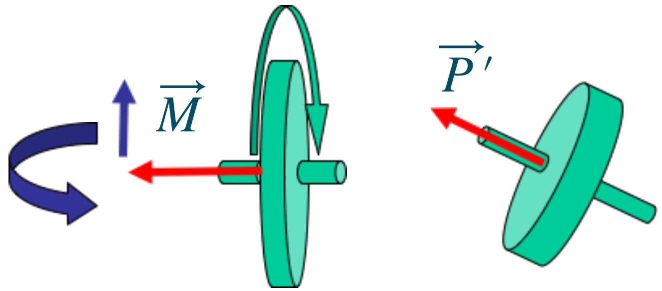
  l'atleta inizia l'esercizio mettendosi in rotazione con gambe e braccia aperte per poi distendersi verso l'alto, aumentando così la velocità di rotazione

Variazione della direzione di *P*



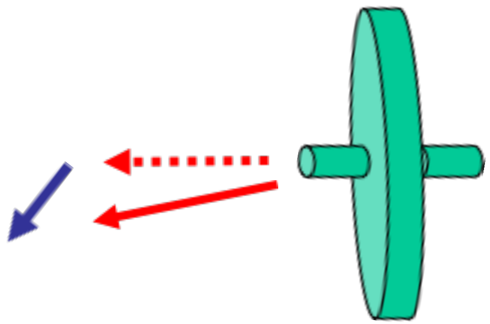
Come si fa per cambiare direzione al momento angolare? Supponiamo di avere una ruota con manubrio, in rotazione intorno all'asse.

Per ruotare l'asse di rotazione verso sinistra, si potrebbe pensare di agire con una coppia che tende a ruotare il manubrio. Ma il momento applicato sarebbe diretto verso l'alto, e tale sarebbe la variazione di P, secondo la seconda equazione cardinale.



Il risultato sarebbe quindi quello di far ruotare il momento angolare verso l'alto, inclinando la ruota verso destra!

Per ottenere la rotazione voluta, si deve invece applicare un momento orizzontale.
Per esempio, in sella ad una motocicletta, tale momento si può facilmente ottenere spostando il peso verso sinistra.

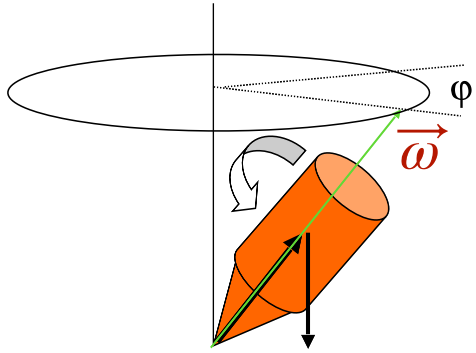


In questo modo si ottiene un momento della forza peso sul piano orizzontale diretto all'indietro, che fa ruotare il momento angolare, e quindi l'asse di rotazione, sul piano orizzontale, nella direzione voluta.

Moti giroscopici (FMUV 8.14)

Trottola con base fissa

$$\vec{r}_C \times M\vec{g} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt}$$



poiché $d\vec{\omega}/dt$ è perpendicolare a $\vec{\omega}$, il suo modulo rimane costante (formula di Poisson) come la sua proiezione verticale, mentre la sua direzione ruota, descrivendo una circonferenza (precessione).

Ora, essendo $d\omega = \frac{r_C Mg}{I}\sin\vartheta dt$ (dove ϑ è l'angolo polare)

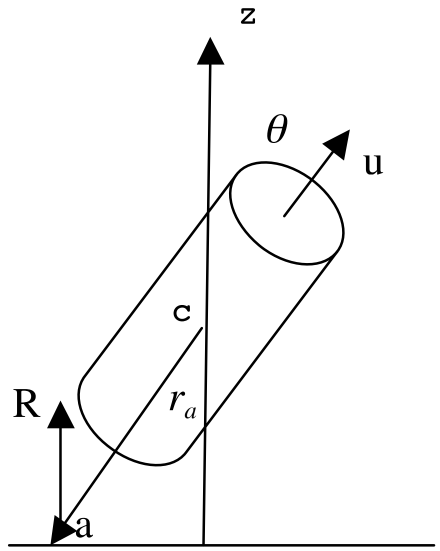
e al tempo stesso $d\omega = \omega \sin\vartheta d\varphi$

uguagliando i secondi membri si ottiene $r_C Mg \sin\vartheta dt/I = \omega \sin\vartheta d\phi$

per cui la velocità angolare di precessione sarà $\frac{d\varphi}{dt} = \frac{r_C Mg}{I\omega}$

Abbiamo fatto qualche approssimazione? Trottola veloce

Trottola veloce su un piano senza attrito



Sempre nelle condizioni di trottola veloce possiamo assumere che la direzione media di u coincida con quella di P.

Poiché la gravità e la reazione vincolare sono entrambe verticali, il c.d.m. non ha accelerazione orizzontale.

Poiché il punto a è libero di muoversi, è conveniente scegliere il polo nel c.d.m.

Il momento esterno è dunque quello della reazione vincolare R, ed è ortogonale sia ad R che a P. Se la variazione di P è ortogonale sia a P che alla verticale, si deve conservare sia il modulo di P che la sua proiezione verticale. In conseguenza, anche in questo caso ϑ è costante, ed è quindi costante la quota del c.d.m. che può quindi rimanere fermo.

Se la quota del c.d.m. è costante, la risultante verticale delle forze esterne deve annullarsi: $\vec{R} = -M\vec{g}$

Dalla formula di Poisson per la derivata di un vettore di modulo costante si ha

$$|M^{(e)}| = \left|\frac{dP}{dt}\right| = \left|\vec{\omega}_p \times \vec{p}\right| = \omega_p P \sin\vartheta \quad \Rightarrow \quad Mgr_a \sin\vartheta = \omega_p \sin\vartheta \quad \Rightarrow \quad \omega_p = \frac{Mgr_a}{P}$$

come nel caso precedente.

Tensore d'inerzia **(FMUV 2a ed. 8.16, o appunti sul sito del corso)**

Abbiamo visto che per una rotazione intorno ad un asse fisso $\vec{P} = \vec{P}_\perp + \vec{P}_{//}$

Consideriamo ora una rotazione qualunque ($\vec{\omega} = \vec{\omega}(t)$ in modulo e direzione) in un riferimento inerziale che in quel determinato istante ha origine nel c.d.m. Scegliamo il c.d.m. come polo di riduzione del momenti e indichiamo con $\vec{r}_i$ la posizione di un generico punto rispetto al c.d.m.

La velocità di ciascun punto nel riferimento inerziale è $\vec{v}_i = \vec{\omega} \times \vec{r}_i$ e il suo momento angolare è $\vec{p}_i = \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \vec{r}_i \times (\vec{\omega} \times \vec{r}_i)$

Tenendo conto che $\vec{a} \times (\vec{b} \times \vec{c}) = (\vec{a} \cdot \vec{c})\vec{b} - (\vec{a} \cdot \vec{b})\vec{c}$,

il momento angolare totale è dato da:

$$\vec{P} = \sum \vec{r}_i \times m_i \vec{v}_i = \sum m_i\left(r_i^2\vec{\omega} - (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)\vec{r}_i\right) = \sum m_i\left(r_i^2\vec{\omega} - (x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z)\vec{r}_i\right)$$

le cui componenti sono:

$$P_x = \sum m_i\left(\omega_x r_i^2 - x_i(x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z)\right) = \sum m_i\left(\omega_x(r_i^2 - x_i^2) - x_i y_i\omega_y - x_i z_i\omega_z\right)$$

$$P_y = \sum m_i\left(\omega_y r_i^2 - y_i(x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z)\right) = \sum m_i\left(-x_i y_i\omega_x + \omega_y(r_i^2 - y_i^2) - y_i z_i\omega_z\right)$$

$$P_z = \sum m_i\left(\omega_z r_i^2 - z_i(x_i\omega_x + y_i\omega_y + z_i\omega_z)\right) = \sum m_i\left(-x_i z_i\omega_x - y_i z_i\omega_y + \omega_z(r_i^2 - z_i^2)\right)$$

Tensore d'inerzia (2)

$$P_x = \sum m_i\left(\omega_x(r_i^2 - x_i^2) - x_i y_i \omega_y - x_i z_i \omega_z\right)$$

$$P_y = \sum m_i\left(- x_i y_i \omega_x + \omega_y(r_i^2 - y_i^2) - y_i z_i \omega_z\right)$$

$$P_z = \sum m_i\left(- x_i z_i \omega_x - y_i z_i \omega_y + \omega_z(r_i^2 - z_i^2)\right)$$

Introduciamo ora le distanze di ogni punto da ciascuno dei tre assi cartesiani

$$d_{ix}^2 = y_i^2 + z_i^2 = r_i^2 - x_i^2$$

$$d_{iy}^2 = x_i^2 + z_i^2 = r_i^2 - y_i^2$$

$$d_{iz}^2 = x_i^2 + y_i^2 = r_i^2 - z_i^2$$

e usiamo una notazione matriciale

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} \sum m_i d_{ix}^2 & -\sum m_i x_i y_i & -\sum m_i x_i z_i \\ -\sum m_i x_i y_i & \sum m_i d_{iy}^2 & -\sum m_i y_i z_i \\ -\sum m_i x_i z_i & -\sum m_i y_i z_i & \sum m_i d_{iz}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \|I\|\vec{\omega}$$

Il tensore d'inerzia è rappresentato da una matrice simmetrica.