Ω aperto di $\mathbb{R}^N$, $\quad 1 \le p < \infty$

Sia $\quad W^{-1,p'}(\Omega) = \left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)^*$

TEOREMA Sia $F \in W^{-1,p'}(\Omega)$. Allora

$\exists$ $N+1$ funzioni $f_0, f_1, \dots f_N \in L^{p'}(\Omega)$ t.c.

$$\langle F, u\rangle = \int_\Omega f_0 u + \sum_{i=1}^N \int_\Omega f_i u_{x_i} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

$$\|F\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} = \max_{0 \le i \le N} \|f_i\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

Inoltre se Ω è limitato posso prendere $f_0 = 0$.

DIM. Considero il prodotto

$$X = \left(L^p(\Omega)\right)^{N+1} = \left\{ \underline{f} = (f_0, f_1, \dots, f_N) \text{ con } f_i \in L^p(\Omega) \right\}$$

$$\|\underline{f}\|_X = \sum_{i=0}^N \|f_i\|_{L^p(\Omega)}$$

Considero l'applicazione

$$T : \quad W_0^{1,p}(\Omega) \longrightarrow X$$
$$u \longmapsto \{u, u_{x_1}, \dots u_{x_N}\}$$

è un'isometria (iniettiva ma non suriettiva).

Sia $G = T(W_0^{1,p}(\Omega)) \subset X$

è un sottospazio di X.

$$T^{-1} : G \longrightarrow W_0^{1,p}(\Omega)$$

Sia $F \in W^{-1,p'}(\Omega)$

La funzione
$$G \longrightarrow \mathbb{R}$$
$$h \longmapsto \langle F, T^{-1} h \rangle$$
è un funzionale lineare e continuo su G.

Per Hahn-Banach questo funzionale si può estendere come funzionale lineare e continuo su tutto X (a parità di norma).

Chiamo $\phi \in X^*$ questo funzionale

$$\phi \in \left(\left(L^p(\Omega) \right)^{N+1} \right)^*$$

<u>OSS</u> un funzionale di questo tipo si scrive come

$$\langle \phi, \underline{u} \rangle = \sum_{i=0}^{N} \langle f_i, u_i \rangle \quad \text{con } f_i \in L^{p'}(\Omega)$$

Infatti considero lo sp. prodotto di due sp. Banach

$$F \in (X \times Y)^* \Rightarrow F = F_1 + F_2 \qquad F_1 \in X^*, \; F_2 \in Y^*.$$

$$\langle F, (x,y) \rangle = \underbrace{\langle F, (x,0) \rangle}_{= \langle F_1, x \rangle} + \underbrace{\langle F, (0,y) \rangle}_{= \langle F_2, y \rangle}$$

$\Rightarrow \forall \ \underline{h} \in X$

$$\langle \phi, \underline{h} \rangle = \sum_{i=0}^{N} \langle f_i, h_i \rangle \qquad f_i \in L^{p'}(\Omega)$$

Sia ora $\underline{h} \in G = T\left(W_0^{1,p}(\Omega)\right)$

$$\underline{h} = Tu \qquad u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

$$\underset{\langle F, u \rangle}{\overset{\langle \phi, h \rangle}{\|}} = \sum_{i=0}^{N} \langle f_i, h_i \rangle = \int_\Omega f_0 u \, dx + \sum_{i=1}^{N} \int_\Omega f_i u_{x_i} dx$$

Se Ω è limitato, allora per la dis. di Poincaré posso usare su $W_0^{1,p}(\Omega)$ la norma equivalente $\sum_{i=1}^{N} \|u_{x_i}\|_{L^p(\Omega)}$ e quindi, ripetendo il ragionamento si ha che posso prendere $f_0 = 0$. II

<u>OSS</u> La stessa rappresentazione del duale vale per $\left(W^{1,p}(\Omega)\right)'$

Immersioni compatte degli sp. di Sobolev.

X, Y sp. di Banach

$X \subset Y$ con immersione continua.

significa

$$\|x\|_Y \leq c' \|x\|_X \qquad \forall x \in X.$$

$X \subset\subset Y$ immersione compatta

significa

$A \subset X$ limitato $\Rightarrow$ A rel. compatto in Y

cioè

$\overline{A}$ compatto in Y

cioè

$\forall \{x_n\}$ limitata in $X \Rightarrow \exists \{x_{n_k}\}$ convergente in Y

Esempio: Ω aperto limitato di classe C^1.

Allora

$$C^1(\overline{\Omega}) \subset\subset C(\overline{\Omega})$$

per Ascoli-Arzelà.

Se u_n limitata $C^1(\overline{\Omega}) \Rightarrow$

$$\left.\begin{array}{l} u_n \text{ limitata } C^0(\overline{\Omega}) \\ \nabla u_n \text{ '' } C^0(\overline{\Omega}) \Rightarrow u_n \text{ equicontinua} \end{array}\right\} \xrightarrow{A.A} u_n \text{ rel. compatta } C^0.$$

TEOREMA Ω limitato e di classe C^1.

Allora le seguenti immersioni sono compatte

1) $1 \le p < N \Rightarrow W^{1,p}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega)$

$p^* = \frac{Np}{N-p}$ $\quad\forall q \in [1, p^*)$

Attenzione: per $q = p^*$ l'immersione è continua ma mai compatta

2) $p = N$ $\quad W^{1,N}(\Omega) \subset\subset L^q(\Omega)$.

$\forall q < \infty$

3) $p > N \Rightarrow W^{1,p}(\Omega) \subset\subset C(\overline{\Omega})$

DIM 3) segue da Ascoli-Arzelà e dal teorema di Morrey.

2) segue da 1) in quanto $W^{1,N} \subset W^{1,p}$ $\forall p < N$, e $p^* \to \infty$ quando $p \nearrow N$

L'unico pto delicato è il pto 1).

Bisogna applicare il teorema di Kolmogorov-Riesz-Frechet sulla compattezza $L^q(\Omega)$

TEOREMA (rel. compattezza in $L^p(\Omega)$)
(Kolmogorov - Riesz - Frechet)

Sia $1 \leq p < \infty$. Sia $\mathcal{F} \subset L^p(\mathbb{R}^N)$ t.c.

1) $\mathcal{F}$ limitato in $L^p(\mathbb{R}^N)$, cioè

$$\|f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq M \qquad \forall f \in \mathcal{F}$$

2) $\forall \varepsilon > 0 \quad \exists \delta > 0$ t.c.

$$\|\tau_h f - f\|_p < \varepsilon \qquad \forall h \text{ t.c. } |h| < \delta \quad \forall f \in \mathcal{F}.$$

cioè

$$\lim_{h \to 0} \|\tau_h f - f\|_p = 0 \quad \text{unif}^{\text{te}} \text{ in } f$$

$$\tau_h f(x) = f(x+h)$$

Allora $\forall \Omega \subset \mathbb{R}^N$ misurabile e di misura finita

$$\mathcal{F}\big|_\Omega = \{ f|_\Omega : f \in \mathcal{F} \} \text{ è rel. compatto in } L^p(\Omega)$$

Cioè $\forall (f_n) \subset \mathcal{F}$ si può estrarre una sottosucc$^{\text{ne}}$ convergente in $L^p(\Omega)$

Dobbiamo prima estendere le fn (limitate in $W^{1,p}(\Omega)$) a tutto $\mathbb{R}^N$.

Si usa il seguente

<u>TEOREMA di ESTENSIONE</u>

Ω limitato e di classe C^1. $1 \leq p \leq \infty$.

Allora esiste un operatore

$$P : W^{1,p}(\Omega) \longrightarrow W^{1,p}(\mathbb{R}^N) \quad \text{t.c.}$$

1) $$Pu\big|_{\Omega} = u$$

$c = c(p, \Omega)$

2) $$\|Pu\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq c \, \|u\|_{L^p(\Omega)}$$

3) $$\|Pu\|_{W^{1,p}(\mathbb{R}^N)} \leq c \, \|u\|_{W^{1,p}(\Omega)}$$

ovviamente non è l'estensione "a zero", che fa uscire dalla classe di Sobolev.

Serve inoltre un'altra proposizione:

TEOREMA $1 < p \leq \infty$

Le seguenti proprietà sono equivalenti:

1) $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$

2) $$\left| \int_{\mathbb{R}^N} u \frac{\partial \varphi}{\partial x_i} dx \right| \leq c \, \|\varphi\|_{L^{p'}(\mathbb{R}^N)}$$

$$\forall \varphi \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$$

3) $\exists c$ t.c. $\forall h \in \mathbb{R}^N$

$$\|\tau_h u - u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq c \, |h|$$

e si può prendere $c = \|\nabla u\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$

OSS se $p = 1$ vale

1) $\Rightarrow$ 2) $\Leftrightarrow$ 3)

Mostriamo solo 1) $\Rightarrow$ 3) per $p < \infty$

Prendiamo $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$, fissiamo $h \in \mathbb{R}^N$

$$v(t) = u(x+th) \qquad t \in \mathbb{R}$$

$$u(x+h) - u(x) = v(1) - v(0) = \int_0^1 v'(t)\,dt$$

$$= \int_0^1 \nabla u(x+th) \cdot h \, dt$$

$$|u(x+h) - u(x)|^p \le |h|^p \left(\int_0^1 |\nabla u(x+th)| \, dt \right)^p \le$$

$$\overset{\text{Hölder}}{\le} \quad |h|^p \left(\int_0^1 |\nabla u(x+th)|^p \, dt \right)$$

Integro in x

$$\|\tau_h u - u\|^p_{L^p(\mathbb{R}^N)} =$$

$$= \int_{\mathbb{R}^N} |u(x+h) - u(x)|^p \, dx \le$$

$$\le |h|^p \int_{\mathbb{R}^N} dx \int_0^1 dt \, |\nabla u(x+th)|^p = \text{Fubini}$$

$$= |h|^p \int_0^1 dt \underbrace{\int_{\mathbb{R}^N} dx \, |\nabla u(x+th)|^p}_{= \|\nabla u\|_p^p \text{ non dipende da } t} = |h|^p \|\nabla u\|_p^p$$

Quindi abbiamo provato la formula desiderata
se $u \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$.

Se $u \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$, trovo (densità) una
succ^ne $u_n \in C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ t.c. $u_n \to u$ $W^{1,p}$.
si scrive la dis. per u_n e si passa al limite.

<u>DIS. DI INTERPOLAZIONE.</u> Ω s.i misurabile di $\mathbb{R}^N$.

Siano $1 \leq r < p < s \leq \infty$

$u \in L^r(\Omega) \cap L^s(\Omega)$, allora $u \in L^p(\Omega)$ e

$$\|u\|_p \leq \|u\|_r^\alpha \, \|u\|_s^{1-\alpha}$$

dove $\alpha \in (0,1)$ è t.c.

$$\frac{1}{p} = \frac{\alpha}{r} + \frac{1-\alpha}{s}$$

<u>dim. nota</u>

Dim Rellich-Kondrachov.

$1 \le p < N$. Sia $1 \le q < p^*$

$\{f_n\}$ limitata in $W^{1,p}(\Omega)$

Mostro che posso estrarre una sottosucc^ne

$\{f_{n_k}\}$ converge forte in $L^q(\Omega)$.

Uso l'operatore di prolungamento

$\{Pf_n\}$ limitate in $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$

d'ora in poi scrivo f_n invece di Pf_n

Mi limito a considerare $p < q < p^*$

Siccome Ω è limitato la conv. forte in $L^q(\Omega)$ implica quella per esponenti più bassi

1) $\{f_n\}$ limitata in $L^q(\mathbb{R}^N)$

$$\|f_n\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \underset{\text{interpolaz.}}{\le} \underbrace{\|f_n\|^{\alpha}_{L^p(\mathbb{R}^N)}}_{\substack{\text{limitata perché} \\ f_n \text{ limitata} \\ \text{in } W^{1,p}(\mathbb{R}^N)}} \underbrace{\|f_n\|^{1-\alpha}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}}_{\substack{\text{limitata} \\ \text{perché}}} \le C$$

$\|f_n\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \le$

$c \, \|\nabla f\|_{L^p(\mathbb{R}^N)}$

2) $\{f_n\}$

$$\|\tau_h f_n - f_n\|_{L^q(\mathbb{R}^N)} \overset{\text{interp.}}{\leq}$$

$$\leq \underbrace{\|\tau_h f_n - f_n\|^{\alpha}_{L^p(\mathbb{R}^N)}}_{\text{Teor.}} \cdot \underbrace{\|\tau_h f_n - f_n\|^{\alpha}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}}$$

$$\|\tau_h f_n - f_n\|^{\alpha}_{L^p(\mathbb{R}^N)} \leq \|\nabla f_n\|^{\alpha}_{L^p(\mathbb{R}^N)} |h|^{\alpha} \leq c\,|h|^{\alpha}$$

$$\|\tau_h f_n - f_n\|^{\alpha}_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \leq \underbrace{\Big(\underbrace{\|\tau_h f_n\|_{L^{p^*}}}_{= \|f_n\|_{L^{p^*}}} + \|f_n\|_{L^{p^*}}\Big)^{\alpha}} = \left(2\|f_n\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)}\right)^{\alpha} \leq C$$

$$\leq c\,|h|^{\alpha}$$

$\Rightarrow$ $\{f_n\}$ rel. compatte in $L^q(\Omega)$