Devo solo provare che queste sono le derivate deboli:

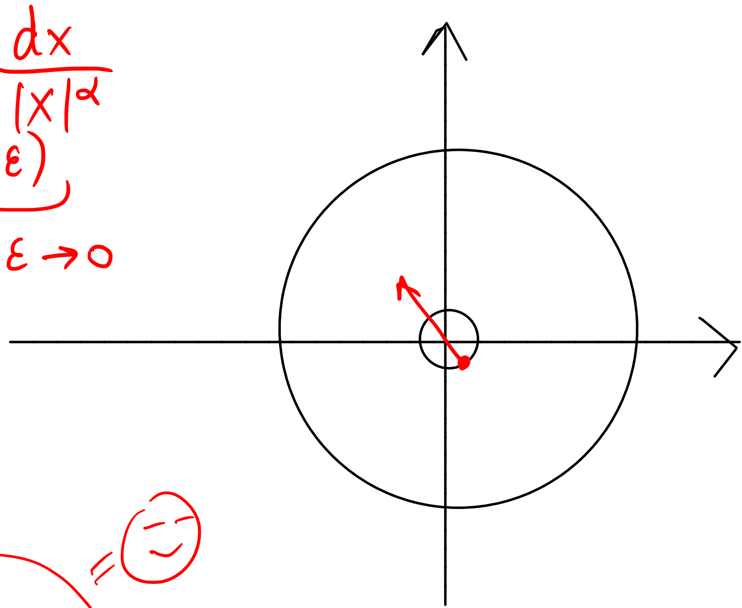
$$\int_{B(0,1)} u(x)\,\varphi_{x_i}(x)\,dx = -\int_{B(0,1)} u_{x_i}(x)\,\varphi(x)\,dx \qquad \forall \varphi \in C_c^1(B(0,1))$$

$$\|$$

$$\int_{B(0,1)\setminus B(0,\varepsilon)} u(x)\,\varphi_{x_i}(x)\,dx + \underbrace{\int_{B(0,\varepsilon)} \frac{\varphi_{x_i}(x)}{|x|^\alpha}\,dx}_{\leq} =$$

$$\|$$

$$\underbrace{c\int_{B(0,\varepsilon)} \frac{dx}{|x|^\alpha}}_{\downarrow\, \varepsilon \to 0 \;\; 0}$$



$$\int_{B(0,1)\setminus B(0,\varepsilon)} u\,\varphi_{x_i}\,dx + \quad =$$

[integro per parti]

$$= +\int_{B(0,1)\setminus B(0,\varepsilon)} \frac{\alpha\, x_i}{|x|^{\alpha+2}}\,\varphi\,dx + \underbrace{\int_{\partial B(0,\varepsilon)} u\,\varphi\,\nu_i\,d\sigma}_{\text{è in modulo } \leq} = \quad + $$

$$c\int_{\partial B(0,\varepsilon)} \frac{1}{\varepsilon^\alpha}\,d\sigma = \frac{c'}{\varepsilon^\alpha}\,\varepsilon^{N-1} \to 0$$

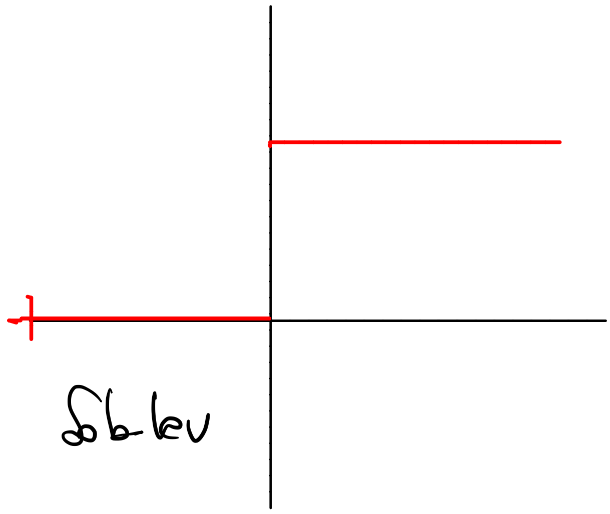
$$= + \int_{B(0,1)\setminus B(0,\varepsilon)} \frac{\alpha\, x_i}{|x|^{\alpha+2}}\, \varphi\, dx + \text{☺} =$$

$$= \int_{B(0,1)} \frac{\alpha\, x_i}{|x|^{\alpha+2}}\, \varphi - \underbrace{\int_{B(0,\varepsilon)} \frac{\alpha\, x_i}{|x|^{\alpha+2}}\, \varphi\, dx}_{=\text{☺}} + \text{☺}$$

$$\xrightarrow{\varepsilon \to 0} - \int_{B(0,1)} u_{x_i}\, \varphi\, dx$$

__N.B__ $\Omega = (-1,1) \subset \mathbb{R}$

$$u(x) = \begin{cases} 0 & x \in (-1,0) \\ 1 & x \in (0,1) \end{cases}$$



non appartiene ad alcuno sp. di Sobolev

$W^{1,p}(-1,1)$

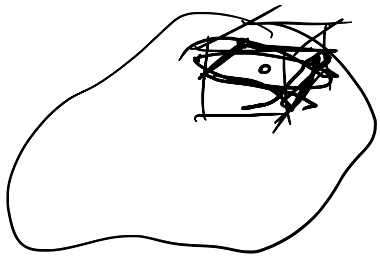
TEOREMA di DENSITÀ

Ω aperto di classe C^1. (ossia, preso $x_0 \in \partial\Omega$ esiste un intorno cubico U di x_0 t.c. $\partial\Omega\big|_U$ è il grafico di una funzione di $N-1$ variabili di classe C^1).

Sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$ $1 \leq p < \infty$

Allora $\exists \{\varphi_n\} \subset C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$

t.c. $\varphi_n\big|_\Omega \longrightarrow u$ in $W^{1,p}(\Omega)$



In altre parole, le restrizioni a Ω di funzioni $C_c^\infty(\mathbb{R}^N)$ formano un sottosp. denso di $W^{1,p}(\Omega)$

<u>OSS</u> Il teorema è vero anche se $\Omega = \mathbb{R}^N$

<u>OSS</u> Il teorema è falso se Ω è irregolare

TEOREMA (Sobolev/Gagliardo/Nirenberg, Morrey, Trudinger)

[Le funzioni $W^{1,p}(\Omega)$ sono più regolari che $L^p(\Omega)$].

$\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitato e di classe C^1. $1 \leq p \leq \infty$

- se $p < N$, allora $W^{1,p}(\Omega) \subset L^{p^*}(\Omega)$

$$p^* = \frac{pN}{N-p} > p \qquad \text{[S.G.N].}$$

(la funzione è "più sommabile")

- se $p = N$, allora $W^{1,N}(\Omega) \subset L^q(\Omega) \; \forall q < \infty$

anzi $$\int_\Omega e^{|u|^{\frac{N}{N-1}}} dx < \infty \qquad \text{(Trudinger)}$$

- se $p > N$, allora $W^{1,p}(\Omega) \subset L^\infty(\Omega)$

anzi $W^{1,p}(\Omega) \subset C^{0,\alpha}(\overline{\Omega})$

cioè sono le funzioni continue t.c. (Morrey)

$$|u(x_1) - u(x_2)| \leq C\,|x_1 - x_2|^\alpha$$

$$\alpha = 1 - \frac{N}{p} \in (0,1)$$

e tutte le immersioni sono continue.

Dis. di Sobolev

$$1 \le p < N$$

$$\|\varphi\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \le C_{N,p} \|\nabla\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \qquad \forall \varphi \in C^1_c(\mathbb{R}^N)$$

Poiché $C^1_c(\mathbb{R}^N)$ è denso in $W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$

$$\|\varphi\|_{L^{p^*}(\mathbb{R}^N)} \le C_{N,p} \|\nabla\varphi\|_{L^p(\mathbb{R}^N)} \qquad \forall \varphi \in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$$

Lo spazio $W^{1,p}_0(\Omega)$.

Ω aperto di $\mathbb{R}^N$ $\qquad 1 \le p < \infty$

$$W^{1,p}_0(\Omega) \overset{def}{=} \text{chiusura di } C^1_c(\Omega) \text{ in } W^{1,p}(\Omega)$$

OSS se $\Omega = \mathbb{R}^N$, $W^{1,p}_0(\mathbb{R}^N) = W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$

OSS $W^{1,p}_0(\Omega)$ è uno sp. di Banach

Idea intuitiva: $W^{1,p}_0(\Omega)$ va pensato come l'insieme delle funzioni di $W^{1,p}(\Omega)$ che "sono nulle su $\partial\Omega$"

Questo non sembra avere molto senso perché le funzioni di L^p sono definite a meno di insiemi di misura nulla, e $\partial\Omega$ ha misura nulla (almeno se Ω è regolare).

Alcuni risultati che suggeriscono questo:

PROP se $u \in W^{1,p}(\Omega)$ e $\operatorname{supp} u \subset\subset \Omega$ (cioè $\operatorname{supp} u$ compatto $\subset \Omega$)

allora $u \in W_0^{1,p}(\Omega)$

Se u è misurabile in $\mathbb{R}^N$, definiamo
$\operatorname{supp} u$ = il complementare del più grande aperto ω t.c. $u = 0$ q.o. in ω.

se u misurabile in Ω, si prolunga a zero in $\mathbb{R}^N \setminus \Omega$.

TEOREMA $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitato e di classe C^1.

Sia $u \in W^{1,p}(\Omega) \cap C(\overline{\Omega})$ (questo per es. è sempre vero se $p > N$)

cioè ammette un rappres. continuo,

Allora $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \Longleftrightarrow u = 0$ su $\partial\Omega$

TEOREMA $\Omega \subset \mathbb{R}^N$ limitato e di classe C^1

Sia $u \in W^{1,p}(\Omega)$

Allora $u \in W_0^{1,p}(\Omega) \Longleftrightarrow \tilde{u}(x) = \begin{cases} u(x) & x \in \Omega \\ 0 & x \in \mathbb{R}^N \setminus \Omega \end{cases}$

$\in W^{1,p}(\mathbb{R}^N)$

La dis. di Sobolev vale anche in $W_0^{1,p}(\Omega)$

$\underline{1 \leq p < N}$

$$\|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq c_{N,p} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$$

$$p^* = \frac{pN}{N-p}$$

<u>COROLLARIO</u> (dis. di Poincaré).

Ω aperto <u>limitato</u> di $\mathbb{R}^N$. $\quad 1 \leq p < \infty$

Allora $\forall u \in W_0^{1,p}(\Omega)$ si ha

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c_{N,p,\Omega} \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)^N}$$

Ne segue che in $W_0^{1,p}(\Omega)$ posso usare la norma $\|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$ al posto della norma usuale

$$\|u\|_{W_0^{1,p}(\Omega)} = \|u\|_{L^p} + \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}.$$

<u>Dim</u> Sia $1 \leq p < N$.

Ω limitata

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c \|u\|_{L^{p^*}(\Omega)} \leq c \|\nabla u\|_{L^p(\Omega)}$$

Nel caso $p \geq N$, scelgo $q < N$ t.c. $q^* > p$

$$\|u\|_{L^p(\Omega)} \leq c \|u\|_{L^{q^*}} \leq c' \|\nabla u\|_{L^q} \leq c'' \|\nabla u\|_{L^p}$$

Duale di $W_0^{1,p}(\Omega)$

Ω aperto di $\mathbb{R}^N$ $\quad 1 \leq p < \infty$

Chiamiamo $W^{-1,p'}(\Omega) = (W_0^{1,p}(\Omega))^*$

TEOREMA Sia $F \in W^{-1,p'}(\Omega)$. Allora

$\exists$ $N+1$ funzioni $f_0, f_1, \dots f_N \in L^{p'}(\Omega)$ t.c.

$$\langle F, u \rangle = \int_\Omega f_0 u + \sum_{i=1}^N \int_\Omega f_i u_{x_i} \quad \forall u \in W_0^{1,p}(\Omega).$$

$$\|F\|_{W^{-1,p'}(\Omega)} = \max_{0 < i \leq N} \|f_i\|_{L^{p'}(\Omega)}$$

Dim. prossima volta.

Cos'è la convergenza debole in $W_0^{1,p}(\Omega)$ con $1 \leq p < \infty$?

$u_n \rightharpoonup u$ deb. $W_0^{1,p}(\Omega) \iff \langle F, u_n \rangle \to \langle F, u \rangle$ $\forall F \in W^{-1,p'}(\Omega)$

$\Updownarrow$

$u_n \rightharpoonup u$ deb. $L^p(\Omega)$

$(u_n)_{x_i} \rightharpoonup (u)_{x_i}$ deb $L^p(\Omega)$

$\forall i = 1 \dots N$.