

Trovare esempi di successioni che convergano debolmente ma non fortemente in $W_0^{1,p}(\Omega)$ $1 \leq p < \infty$.

Sia Ω aperto di $\mathbb{R}^N$.

Per quanto visto sul duale di $W_0^{1,p}(\Omega)$, si ha

$$u_n \rightharpoonup u \text{ in } W_0^{1,p}(\Omega) \iff \begin{cases} u_n \rightharpoonup u \text{ in } L^p(\Omega) & [*] \\ (u_n)_{x_i} \rightharpoonup u_{x_i} \text{ in } L^p(\Omega) \quad \forall i=1, \dots, N \end{cases}$$

[*] anzi, $u_n \rightarrow u$ forte in $L^p(\Omega)$ se Ω è limitato (per il teorema di Rellich-Kondrachov).

Affinché la convergenza sia debole ma non forte, in $W_0^{1,p}$ occorre che i gradienti convergano debolmente ma non fortemente in $L^p(\Omega)$.

Occorre quindi ricordare quali sono gli esempi di successioni che convergono debolmente ma non fortemente in L^p .

Esempio 1

Prendiamo $N=1$, $\Omega = (0,1)$.

Allora sappiamo che

$$v_n(x) = \cos(nx) \begin{cases} \rightharpoonup 0 & \text{in } L^p(0,1) \quad \forall p < \infty \\ \xrightarrow{*} 0 & \text{in } L^\infty(0,1) \end{cases}$$

ma la convergenza non è forte per nessun p .

Quindi prendiamo

$$u_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx) \quad \text{in modo che } u_n'(x) = v_n(x)$$

osserviamo che $u_n \rightarrow 0$ in $L^\infty(0,1)$.

Unico problema: $u_n(x) \in W^{1,p}(\Omega)$ ma $u \notin W_0^{1,p}(\Omega)$

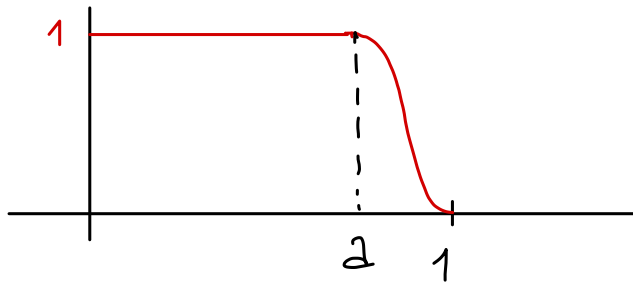
Per risolvere questo problema ci sono varie soluzioni.

1) Possiamo prendere $u_n(x) = \frac{1}{n} \sin(n\pi x) \in W_0^{1,p}(0,1)$

Chiaramente $u_n \rightarrow 0$ in $W_0^{1,p}(0,1) \forall p \in [1, \infty)$.

2) Possiamo prendere una funzione cut-off.

$\varphi(x) \in C^1([0,1])$ fatta così:



e poi prendiamo

$$u_n(x) = \frac{1}{n} \sin(nx) \varphi(x) \in W_0^{1,\infty}(0,1),$$

$$\text{Allora } u_n \rightarrow 0 \quad L^\infty(0,1)$$

$$u_n'(x) = \cos(nx) \varphi(x) + \frac{1}{n} \sin(nx) \varphi'(x).$$

osservato che

$$\begin{aligned} \cos(nx) \varphi(x) &\rightharpoonup 0 \quad \text{in } L^p(0,1) \\ &\not\rightarrow 0 \quad L^\infty \end{aligned}$$

$$\text{e che } \frac{1}{n} \sin(nx) \varphi'(x) \rightarrow 0 \quad L^\infty(0,1) \text{ forte,}$$

$$\text{si ha che } u_n' \rightharpoonup 0 \quad L^p(0,1) \quad \forall p < \infty,$$

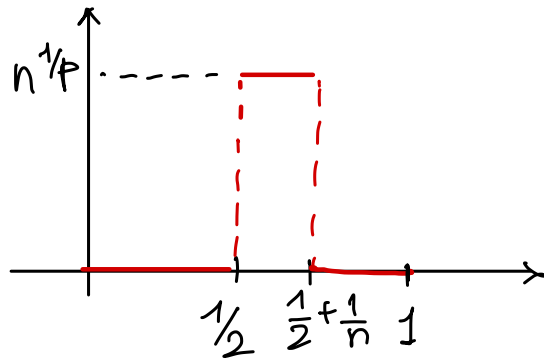
e quindi

$$u_n \rightarrow 0 \quad W_0^{1,p}(0,1) \quad \forall p < \infty$$

Tuttavia la convergenza non è forte, in quanto in $(0,1)$ $u_n(x) = \cos(nx)$ non converge forte in L^p .

Esempio 2 Fissiamo p t.c. $1 < p < \infty$.

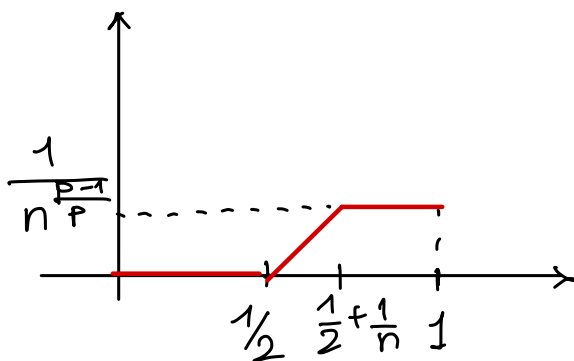
Consideriamo $v_n(x) = n^{1/p} \chi_{(\frac{1}{2}, \frac{1}{2} + \frac{1}{n})}(x)$



Allora $v_n \rightarrow 0$ in $L^p(0,1)$ ma $v_n \not\rightarrow 0$ in $L^p(0,1)$ in quanto $\|v_n\|_p = 1$.

Prendiamo $u_n(x) = \int_0^x v_n(t) dt$. Allora

$u_n \in W^{1,\infty}(\Omega)$ ed è fatta così:



$$\frac{1}{n} n^{1/p}$$

$$n^{\frac{1}{p}-1}$$

$$n^{\frac{1-p}{p}}$$

Unico problema: $u_n \notin W_0^{1,p}(\Omega)$.

Per rimediare si possono scegliere due strade:

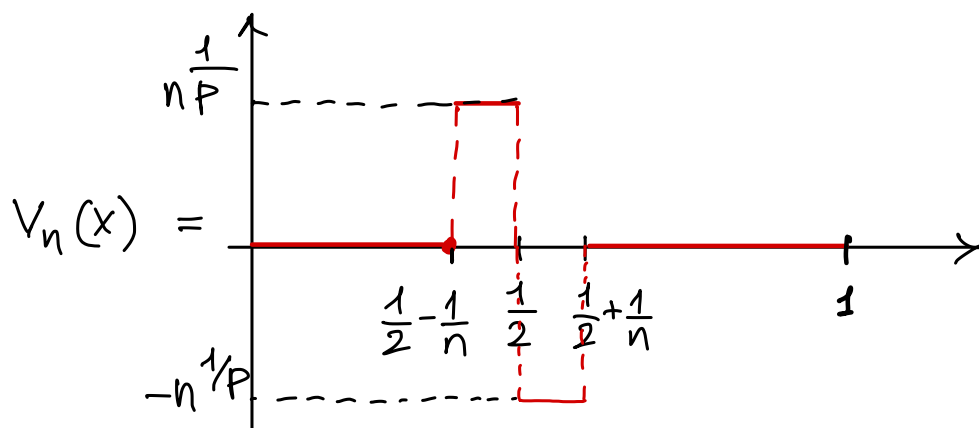
1) Si prende una funzione cut-off φ come nel caso precedente (con $\alpha \in (\frac{1}{2}, 1)$) e poi

$$u_n(x) = \varphi(x) \int_0^x v_n(t) dt \in W_0^{1,p}(0,1)$$

Allora è facile controllare che $u_n \rightarrow 0$ in $W_0^{1,p}(0,1)$ ma non forte, visto che in $(0, \alpha)$ si ha

$$u_n'(x) = v_n(x) \not\rightarrow 0 \text{ in } L^p(0, \alpha).$$

2) Si modifica la v_n così:



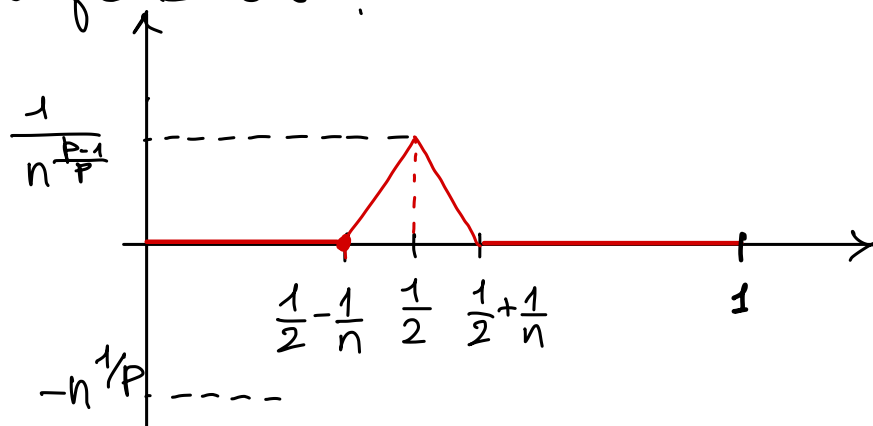
OSS $v_n(x) \rightarrow 0$ in $L^p(0,1)$
 $\not\rightarrow 0$ in $L^p(0,1)$

e si prende

$$u_n(x) = \int_0^x v_n(t) dt \in W_0^{1,p}(0,1)$$

$\frac{1}{n}$

u_n è fatta così.



Allora chiaramente $u_n \rightarrow 0$ $W_0^{1,p}(0,1)$
ma $u_n \not\rightarrow 0$ $W_0^{1,p}(0,1)$.

Entrambi questi esempi si possono generalizzare
a più dimensioni. Per esempio possiamo prendere
 Ω aperto limitato di $\mathbb{R}^2$.

$$e \quad z_n(x,y) = \frac{1}{n} \sin(nx) \varphi(x,y)$$

dove $\varphi(x,y)$ è una funzione $C_c^1(\Omega)$ che
valga 1 in un aperto $\omega \subset \subset \Omega$.

Allora $z_n(x,y) \rightarrow 0$ $W_0^{1,p}(\Omega)$ $\forall p < \infty$
 $\not\rightarrow 0$ " $$

ESERCIZIO

Mostrare, applicando la definizione che

$$u(x) = \text{sign } x = \begin{cases} 1 & x \in (0, 1) \\ 0 & x \in (-1, 0) \end{cases}$$

non appartiene a $W^{1,p}(-1, 1)$ per nessun p .

Basta mostrare che $u \notin W^{1,1}(-1, 1)$.

Infatti, supponiamo che u ammetta derivata debole

$v \in L^1(-1, 1)$. Allora dovrebbe averi.

$$\int_{-1}^1 u(x) \varphi'(x) dx = - \int_{-1}^1 v(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_c^1(-1, 1)$$

cioè

$$\int_0^1 \varphi'(x) dx = - \int_{-1}^1 v(x) \varphi(x) dx$$

cioè

$$(*) \quad \varphi(0) = \int_{-1}^1 v(x) \varphi(x) dx \quad \forall \varphi \in C_c^1(-1, 1)$$

Se prendiamo $\varphi \in C_c^1(-1, 0)$, otteniamo

$$\int_{-1}^0 v(x) \varphi(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^1(-1, 0)$$

da cui $v = 0$ q.o. in $(-1, 0)$

Analogamente

$$\int_0^1 v(x) \varphi(x) dx = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^1(0,1)$$

$$\Rightarrow v = 0 \quad \text{q.o. in } (0,1).$$

$$\text{Quindi } v = 0 \quad \text{q.o. in } (-1,1)$$

la (*) allora diventa:

$$\varphi(0) = 0 \quad \forall \varphi \in C_c^1(-1,1).$$

che è assurda perché possiamo prendere $\varphi(0) \neq 0$.

Vedremo a lezione che $u(x) \in BV(-1,1)$ e che

$$u'(x) = \delta_0 \quad (\text{delta di Dirac}).$$