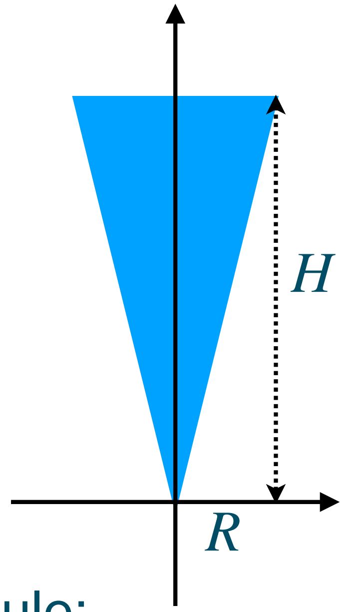
Momento d'inerzia di un cono



Cono retto con raggio di base R e altezza H

Scegliamo un riferimento col vertice del cono nell'origine e l'asse del cono orientato come l'asse y.

Dividiamo il cono in dischi di spessore infinitesimo dy.

Ciascun disco contribuirà con un momento d'inerzia

$dI = \frac{1}{2}r^2 dm$, in cui r e dm dipenderanno da y secondo le formule:

$r = y\frac{R}{H}$ e $dm = \rho dV = \rho\pi r^2 dy$, per cui $\quad V = \int_0^H \pi r^2 dy = \int_0^H \pi \frac{R^2}{H^2} y^2 dy = \frac{1}{3}\pi R^2 H$

$dI = \frac{1}{2}r^2 dm = \frac{1}{2}\rho\pi r^4 dy = \frac{1}{2}\left(y\frac{R}{H}\right)^4 \rho\pi dy$, da integrare da 0 a H:

$$I = \int_0^H \frac{1}{2}\left(y\frac{R}{H}\right)^4 \rho\pi dy = \frac{1}{2}\frac{R^4}{H^4}\rho\pi\int_0^H y^4 dy = \frac{\rho\pi R^4 H}{10}$$

essendo $V = \frac{1}{3}\pi R^2 H$, per cui $\rho = \frac{3M}{\pi R^2 H}$, si ha $\quad I = \frac{3}{10}MR^2$

Se non lo ricordiamo, come possiamo calcolare il volume del cono?

Lavoro di forze e momenti (FMUV 8.7)

Per un sistema rigido, poiché le distanze tra i punti non possono variare, le forze interne non compiono lavoro.

Il lavoro delle forze esterne è dato da:

$$\vec{a} \cdot (\vec{b} \times \vec{c}) = \vec{b} \cdot (\vec{c} \times \vec{a})$$

$$\delta L = \sum \vec{f}_i^{(e)} \cdot \vec{v}_i dt = \sum \vec{f}_i^{(e)} \cdot \left(\vec{v}_c + \vec{\omega} \times \vec{r}_i'\right) dt = \vec{F}_i^{(e)} \cdot \vec{v}_c dt + \sum \left(\vec{r}_i' \times \vec{f}_i^{(e)}\right) \cdot \vec{\omega} dt$$

ossia $\delta L = \vec{F}^{(e)} \cdot \vec{v}_c dt + \vec{M}^{(e)} \cdot \vec{\omega} dt$

Il primo termine corrisponde alla variazione dell'energia associata al moto del c.d.m., il secondo alla variazione dell'energia cinetica di rotazione.

Nel caso di rotazioni intorno ad un asse fisso il lavoro diventa semplicemente

$$\delta L = M_z^{(e)} d\vartheta$$

Il momento motore, quindi, si riduce alla componente assiale del momento totale, sia dal punto di vista dell'accelerazione angolare, sia da quello dell'energia cinetica.

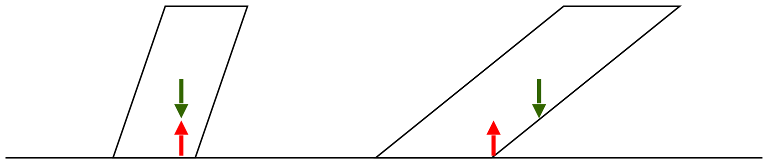
Bisogna ricordare tuttavia che eventuali componenti ortogonali (necessarie ad esempio per tenere in rotazione assi non bilanciati) richiedono forze (pressioni) sui vincoli, con conseguente aumento degli attriti. Questi a loro volta generano momenti assiali che rallentano la rotazione, e vanno quindi minimizzati.

Statica dei corpi rigidi (FMUV 8.10)

Equazioni fondamentali della statica: $\vec{F}^{(e)} = 0 \quad \vec{M}^{(e)} = 0$

Ruolo delle reazioni vincolari,

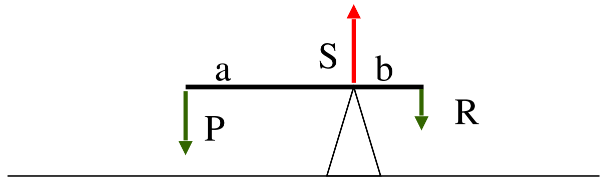
non note a priori. es.:



La verticale del baricentro deve cadere nel perimetro di base

Leva: $S = P + R$

$$Pa - Rb = 0 \quad \Rightarrow \quad P = \frac{b}{a} R$$

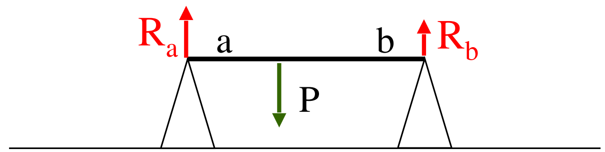


Altro esempio

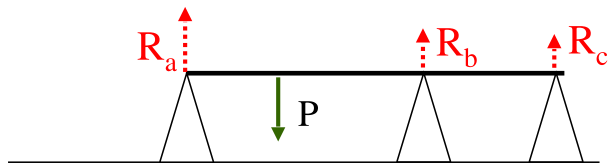
$$R_a + R_b - P = 0$$

$$R_b(a+b) - Pa = 0 \qquad R_b = \frac{Pa}{a+b}$$

$$R_a = P - R_b = \frac{Pa + Pb - Pa}{a+b} = \frac{Pb}{a+b}$$



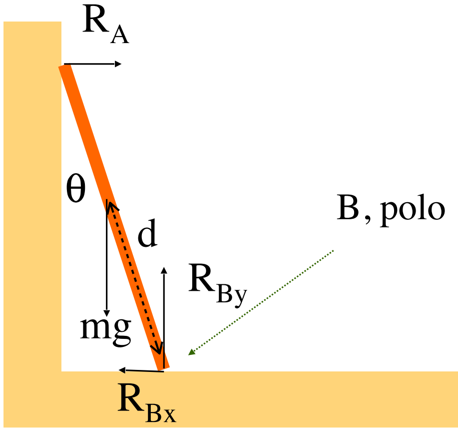
Il problema può essere indeterminato:



Statica di una scala a pioli

equilibrio di una scala di lunghezza l, massa trascurabile, con una persona di massa m a distanza d.

Se non ci fosse attrito in B, R_A non sarebbe bilanciato.



$$R_A - R_{Bx} = 0$$

$$-mg + R_{By} = 0$$

(polo in B) $$-R_A l \cos\vartheta + mgd \sin\vartheta = 0$$

$$R_A = \frac{mgd}{l}\tan\vartheta$$

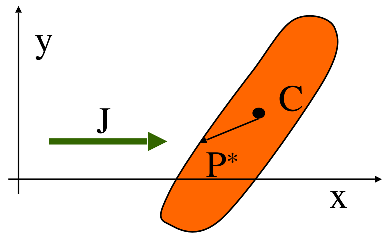
$$R_{Bx} = R_A = \frac{mgd}{l}\tan\vartheta$$

$$R_{Bx} < \mu R_{By} \quad \Rightarrow \quad \frac{mgd}{l}\tan\vartheta < \mu mg \qquad \tan\vartheta < \frac{\mu l}{d}$$

Il limite diminuisce al crescere di d: se si sale sulla scala, il momento della forza peso aumenta e deve aumentare anche la forza di attrito:

se la forza necessaria è superiore al limite dell'attrito statico, la scala scivola!

Impulso esterno e momento angolare **(FMUV 8.12)**



Trasferimento di impulso (diretto come x) su un corpo appoggiato su un piano xy

Se inizialmente il corpo è fermo, dopo l'impulso, qualunque sia il punto P* su cui agisce l'impulso, si avrà

$$\Delta\vec{Q} = \vec{Q} = \vec{J} \quad \text{e quindi} \quad \vec{v}_C = \frac{\vec{J}}{M}$$

Per il momento angolare rispetto al c.d.m., inizialmente nullo, si avrà:

$$\Delta\vec{P}_C = \vec{P}_C = \int_0^t \vec{M}^{(e)}dt = (\vec{r}^* - \vec{r}_C) \times \int_0^t \vec{F}^{(e)}dt = (\vec{r}^* - \vec{r}_C) \times \vec{J}$$

Ora, benché non ci siano assi fissi di rotazione, il piano d'appoggio vincola la rotazione intorno all'asse z. Sia il momento angolare che la velocità angolare sono quindi verticali, e $\vec{P} = I_C\vec{\omega}$, dove il momento d'inerzia è per un asse verticale passante per il c.d.m.

Sarà inoltre: $\vec{\omega} = -\dfrac{J(y^* - y_C)}{I_C}\hat{k}$

che succede se scelgo P* come polo di riduzione dei momenti?

orario, nullo o antiorario a seconda del segno di $y^* - y_C$