

## Complementi di Meccanica II – Corso del Prof. Longo – AA 04/05

### Relazione generale tra momento angolare e velocità angolare.

#### Il tensore d'inerzia. Le equazioni di Eulero.

Nel caso di rotazioni di un corpo rigido attorno ad un asse fisso, abbiamo visto (FMU, cap. 8.2.2) come, in generale, il momento angolare del sistema abbia una componente ortogonale ad  $\vec{\omega}$ :

$$\vec{P} = -\sum z_i m_i \omega \vec{\rho}_i + \sum m_i \rho_i^2 \vec{\omega} = -\sum z_i m_i \omega \vec{\rho}_i + I \vec{\omega} = \vec{P}_\perp + \vec{P}_\parallel$$

Vediamo ora come ciò si possa generalizzare per una rotazione qualunque, scegliendo un riferimento con origine nel c.d.m. del sistema e il c.d.m. come polo di riduzione dei momenti. Allora la posizione  $\vec{r}_i = (x_i, y_i, z_i)$  di ogni singolo punto in un riferimento solidale col corpo rigido coinciderà col braccio del suo momento angolare e la velocità del punto in un riferimento che non ruota sarà data dalla formula  $\vec{v}_i = \vec{\omega} \wedge \vec{r}_i$ . Si avrà allora, tenendo conto che  $\vec{a} \wedge (\vec{b} \wedge \vec{c}) = \vec{b}(\vec{a} \cdot \vec{c}) - \vec{c}(\vec{a} \cdot \vec{b})$ :

$$\vec{P} = \sum \vec{r}_i \wedge m_i \vec{v}_i = \sum \vec{r}_i \wedge m_i (\vec{\omega} \wedge \vec{r}_i) = \sum m_i (\vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i (\vec{\omega} \cdot \vec{r}_i)) = \sum m_i (\vec{\omega} r_i^2 - \vec{r}_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z))$$

le cui tre componenti sono:

$$P_x = \sum m_i (\omega_x r_i^2 - x_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z)) = \sum m_i (\omega_x (r_i^2 - x_i^2) - x_i y_i \omega_y - x_i z_i \omega_z)$$

$$P_y = \sum m_i (\omega_y r_i^2 - y_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z)) = \sum m_i (-x_i y_i \omega_x + \omega_y (r_i^2 - y_i^2) - y_i z_i \omega_z)$$

$$P_z = \sum m_i (\omega_z r_i^2 - z_i (x_i \omega_x + y_i \omega_y + z_i \omega_z)) = \sum m_i (-x_i z_i \omega_x - z_i y_i \omega_y + \omega_z (r_i^2 - z_i^2))$$

Ora, introducendo le distanze di ogni punto da ciascuno dei tre assi cartesiani,  $d_{ix}^2 = r_i^2 - x_i^2 = y_i^2 + z_i^2$ ,  $d_{iy}^2 = r_i^2 - y_i^2 = x_i^2 + z_i^2$  e  $d_{iz}^2 = r_i^2 - z_i^2 = x_i^2 + y_i^2$ , e usando la notazione matriciale, possiamo scrivere:

$$\vec{P} = \begin{pmatrix} \sum m_i d_{ix}^2 & -\sum m_i x_i y_i & -\sum m_i x_i z_i \\ -\sum m_i x_i y_i & \sum m_i d_{iy}^2 & -\sum m_i y_i z_i \\ -\sum m_i x_i z_i & -\sum m_i y_i z_i & \sum m_i d_{iz}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_x \\ \omega_y \\ \omega_z \end{pmatrix} = \|I\| \vec{\omega}$$

dove  $\|I\|$  prende il nome di tensore d'inerzia. Risulta immediatamente che  $P$  non è in generale parallelo ad  $\omega$ .

Il tensore di inerzia è rappresentato da una matrice simmetrica. La teoria delle matrici garantisce che una simile matrice è sempre diagonalizzabile, ossia è possibile individuare una rotazione del sistema di coordinate che rende la matrice diagonale nel sistema ruotato. Se indichiamo con  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$  e  $\hat{w}$  i tre versori di questo sistema ruotato e con  $P_u, P_v, P_w$  e  $\omega_u, \omega_v, \omega_w$  le componenti rispettivamente di  $P$  e di  $\omega$  in questo sistema, la relazione tra  $P$  e  $\omega$  diventa:

$$\begin{pmatrix} P_u \\ P_v \\ P_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} \sum m_i d_{iu}^2 & 0 & 0 \\ 0 & \sum m_i d_{iv}^2 & 0 \\ 0 & 0 & \sum m_i d_{iw}^2 \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_u \\ \omega_v \\ \omega_w \end{pmatrix} = \begin{pmatrix} I_u & 0 & 0 \\ 0 & I_v & 0 \\ 0 & 0 & I_w \end{pmatrix} \begin{pmatrix} \omega_u \\ \omega_v \\ \omega_w \end{pmatrix}$$

dove i tre termini diagonali coincidono con la definizione dei momenti d'inerzia per rotazioni intorno a ciascuno dei tre assi  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$  e  $\hat{w}$ . Da questa relazione segue che ogni corpo rigido ammette almeno 3 assi liberi di rotazione, che sono appunto  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$  e  $\hat{w}$ , detti *assi centrali d'inerzia*, tutti passanti per il baricentro e ortogonali tra loro, caratterizzati dal fatto che per rotazioni intorno ad essi  $P$  e  $\omega$  sono paralleli. Infatti per  $\vec{\omega} \equiv (\omega, 0, 0)$  deve essere  $\vec{P} \equiv (\omega I_u, 0, 0)$ , per  $\vec{\omega} \equiv (0, \omega, 0)$  deve essere  $\vec{P} \equiv (0, \omega I_v, 0)$  e per  $\vec{\omega} \equiv (0, 0, \omega)$  deve essere  $\vec{P} \equiv (0, 0, \omega I_w)$ .

La conoscenza di  $I_u, I_v, I_w$  permette di calcolare il momento d'inerzia  $I_c$  rispetto ad un qualunque asse passante per il c.d.m. Se infatti consideriamo una rotazione intorno ad un generico asse, rappresentato nel riferimento di assi  $\hat{u}$ ,  $\hat{v}$  e  $\hat{w}$  dal versore  $\hat{c} \equiv (\cos \varphi, \cos \chi, \cos \psi)$ , avremo  $\vec{\omega} = \omega \hat{c} \equiv (\omega \cos \varphi, \omega \cos \chi, \omega \cos \psi)$ , e quindi:

$$P_u = I_u \omega_u = I_u \omega \cos \varphi$$

$$P_v = I_v \omega_v = I_v \omega \cos \chi$$

$$P_w = I_w \omega_w = I_w \omega \cos \psi$$

(naturalmente, anche in questo riferimento,  $P$  non è parallelo ad  $\omega$ ) per cui potremo esprimere il vettore  $P$  come:

$$\vec{P} = (I_u \cos \varphi \hat{u} + I_v \cos \chi \hat{v} + I_w \cos \psi \hat{w}) \omega.$$

Inoltre la proiezione di  $P$  sul versore dell'asse di rotazione è data da:

$$\vec{P} \cdot \hat{c} = (I_u \cos^2 \varphi + I_v \cos^2 \chi + I_w \cos^2 \psi) \omega$$

per cui, dovendo anche essere  $\vec{P} \cdot \hat{c} = I_c \omega$ , segue che il momento d'inerzia  $I_c$  è dato da:

$$I_c = I_u \cos^2 \varphi + I_v \cos^2 \chi + I_w \cos^2 \psi$$

L'energia cinetica di rotazione nel c.d.m., data da  $k' = \frac{1}{2} I_c \omega^2$ , può essere scritta anche come:

$$k' = \frac{1}{2} \vec{P} \cdot \vec{\omega} = \frac{1}{2} I_u \omega_u^2 + \frac{1}{2} I_v \omega_v^2 + \frac{1}{2} I_w \omega_w^2$$

Se vogliamo utilizzare le precedenti espressioni del momento di inerzia nella II equazione cardinale, dobbiamo tener conto che questa è valida in un sistema di riferimento inerziale, mentre il sistema definito dai tre assi centrali, solidale col corpo rigido, non lo è. Possiamo però applicare la trasformazione della derivata di un vettore tra due riferimenti in rotazione uno rispetto all'altro (FMU 3.24.1), ottenendo:

$$\vec{M}^{(e)} = \frac{d\vec{P}}{dt} \Big|_{\text{inerziale}} = \frac{d\vec{P}}{dt} \Big|_{\text{solidale}} + \vec{\omega} \wedge \vec{P}$$

che, esplicitata nelle tre componenti, si traduce nelle tre equazioni di Eulero:

$$M_u^{(e)} = I_u \frac{d\omega_u}{dt} + \omega_v I_w \omega_w - \omega_w I_v \omega_v = I_u \frac{d\omega_u}{dt} + (I_w - I_v) \omega_v \omega_w$$

$$M_v^{(e)} = I_v \frac{d\omega_v}{dt} + (I_u - I_w) \omega_u \omega_w$$

$$M_w^{(e)} = I_w \frac{d\omega_w}{dt} + (I_v - I_u) \omega_u \omega_v$$

che esprimono la seconda equazione cardinale proiettata sui tre assi principali, solidali col corpo rigido.