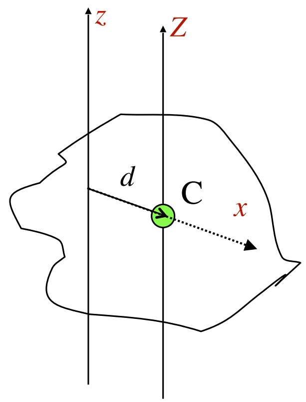
Teorema di Huygens-Steiner

Il calcolo del momento d'inerzia è semplificato se è riferito ad un asse di simmetria. Il momento di inerzia rispetto ad un asse passante per il centro di massa è quindi il più semplice da calcolare, perché qualunque asse di simmetria deve passare per il c.d.m.

Noto I_C rispetto ad un asse $\hat{k}$ passante per il c.d.m. è possibile calcolare I rispetto ad un qualunque asse parallelo al primo.

Fissiamo un riferimento con origine sul nuovo asse e z diretto lungo di esso, mentre x interseca entrambi gli assi, e un riferimento parallelo a questo ma con origine nel c.d.m. e con coordinate X, Y, Z abbiamo:

$$x_i = X_i + d; \quad y_i = Y_i; \quad z_i = Z_i$$



e quindi

$$I = \sum m_i \left(x_i^2 + y_i^2\right) = \sum m_i \left[\left(X_i + d\right)^2 + y_i^2\right]$$

$$I = \sum m_i \left(X_i^2 + Y_i^2\right) + \sum m_i d^2 + 2d \cancel{\sum m_i X_i}$$

da cui deriva il teorema di Huygens-Steiner $I = I_C + Md^2$

Dinamica dei sistemi rigidi con asse fisso (FMUV 8.4.1)

Il ruolo e l'importanza del momento di inerzia si può comprendere considerando la II equazione cardinale, riferita ad un polo posto sull'asse di rotazione $\hat{k}$ e proiettata su questo asse:

$$\vec{M}^{(e)} = \frac{d\vec{P}}{dt} \quad \Rightarrow \quad M_z^{(e)} = \frac{d}{dt}P_z = \frac{d}{dt}\left[(\vec{P}_\perp + I\vec{\omega})\right] \cdot \hat{k} = I\frac{d\omega}{dt} = I\alpha$$

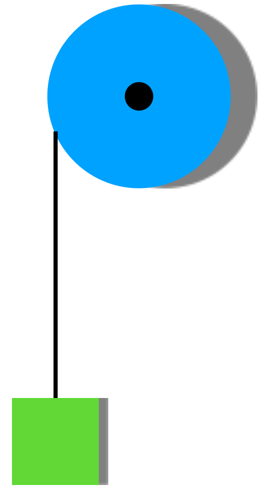
Il momento d'inerzia svolge nella II equazione cardinale lo stesso ruolo della massa (inerziale) nella I (da cui il nome).

La posizione di un sistema rigido rotante intorno ad un asse fisso è completamente determinata dato l'angolo ϑ di rotazione rispetto ad un riferimento fisso. La legge oraria si riduce alla conoscenza di $\vartheta(t)$ che si ottiene per integrazione della precedente proiezione della II eq. cardinale:

$$M_z^{(e)} = I\alpha = I\frac{d\omega}{dt} = I\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$$

Il volano

Un semplice esempio è costituito dal volano, una carrucola di massa M e raggio R a cui è appesa una massa m.



Sulla massa agiscono la forza peso e la tensione del filo.

$$ma = mg - T \quad \Rightarrow \quad T = m(g-a)$$

Sulla carrucola agisce il momento della tensione del filo.

$$I\alpha = RT \quad \Rightarrow \quad T = \frac{I\alpha}{R}$$

la relazione tra le accelerazioni è $a = \dfrac{dv}{dt} = R\dfrac{d\omega}{dt} = R\alpha$

e il momento d'inerzia della carrucola è $I = \dfrac{1}{2}MR^2$

$$\frac{I\alpha}{R} = m(g - R\alpha) \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{1}{2}M + m\right)R\alpha = mg \quad \Rightarrow \quad \left(\frac{M}{2m} + 1\right)R\alpha = g$$

per cui l'accelerazione angolare del volano è $\alpha = \dfrac{g}{R}\left(\dfrac{M}{2m} + 1\right)^{-1}$

Assi di rotazione e assi di simmetria (FMUV 8.4.2)

Abbiamo già detto che se il c.d.m. non si trova sull'asse di rotazione, i vincoli che incernierano l'asse devono fornire la forza esterna necessaria per il moto (circolare) del baricentro. La reazione dei vincoli aumenta l'attrito dinamico (che può essere ridotto con i cuscinetti a sfera).

La eventuale rotazione del momento angolare, che compare nel caso in cui l'asse non sia un asse principale di inerzia, richiede una componente del momento esterno perpendicolare all'asse di rotazione:

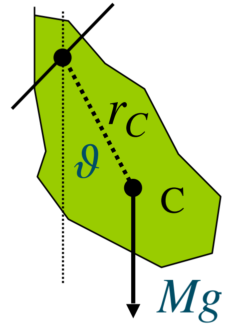
$$\vec{M}^e = \frac{d\vec{P}}{dt} = I\frac{d\vec{\omega}}{dt} + \frac{d\vec{P}_\perp}{dt}$$

Negli alberi rotanti è importante in pratica minimizzare entrambe queste componenti, che solleciterebbero inutilmente i vincoli che li incernierano: tipica l'operazione di equilibratura delle gomme di un'automobile.

Ricordiamo ancora che se l'asse coincide con un asse centrale di inerzia, trascurando gli attriti il moto di rotazione si può mantenere indefinitamente, senza intervento di forze esterne (giroscopio).

Pendolo fisico o composto (FMUV 8.4.3)

Pendolo fisico, o composto: corpo rigido incernierato in un asse non baricentrico.



Proiettando sull'asse la II eq. cardinale, dove la forza è la forza peso, si ottiene:

$$M_z^{(e)} = (\vec{r}_C \times M\vec{g}) \cdot \hat{k} = -Mgr_C \sin\vartheta = I\frac{d^2\vartheta}{dt^2}$$

Per piccolo angolo $\dfrac{d^2\vartheta}{dt^2} + \dfrac{Mgr_C}{I}\vartheta = 0$

la cui soluzione è un moto armonico di pulsazione $\Omega = \sqrt{\dfrac{Mgr_C}{I}}$

Se si considera tutta la massa concentrata nel c.d.m., il momento d'inerzia è dato da $I = Mr_C^2$ e la pulsazione si riduce a quella del pendolo semplice: $\Omega = \sqrt{\dfrac{g}{r_C}}$

Pendolo di torsione **(FMUV 8.4.4)**

Il pendolo di torsione è costituito da un disco cilidrico appeso ad un filo elastico che reagisce alla torsione con un momento $M_z = -k\vartheta$

La II eq. cardinale diventa quindi: $I\dfrac{d^2\vartheta}{dt^2} = -k\vartheta$

la cui soluzione è una rotazione armonica di pulsazione $\Omega = \sqrt{\dfrac{k}{I}}$

Sostituendo il disco con un corpo rigido qualunque, conoscendo k e misurando Ω il pendolo di torsione diventa un semplice strumento per determinare il momento di inerzia del corpo rispetto all'asse passante per il punto di aggancio e il c.d.m.

Come già ricordato in precedenza, il pendolo di torsione ha svolto un ruolo fondamentale per la misura in laboratorio della attrazione gravitazionale e della forza di Coulomb.

Energia cinetica dei corpi rigidi (FMUV 8.6)

Ricordiamo il teorema di Koenig per l'energia cinetica di un sistema,

$$K = K' + \frac{1}{2}Mv_C^2$$

dove K' è l'energia cinetica in un sistema di riferimento solidale col c.d.m. e orientato con assi paralleli ad un riferimento inerziale.

Per un sistema rigido possiamo sommare esplicitamente l'energia cinetica di tutti i punti, tenendo conto che $\vec{v}_i = \vec{V}_C + \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_C)$

$$K = \sum \frac{1}{2}m_i v_i^2 = \sum \frac{1}{2}m_i \left[V_C^2 + \left[\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_C)\right]^2 + 2\vec{V}_C \cdot \vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_C)\right]$$

il doppio prodotto è nullo essendo nullo $\sum m_i(\vec{r}_i - \vec{r}_C)$

mentre $\left[\vec{\omega} \times (\vec{r}_i - \vec{r}_C)\right]^2 = \left(\vec{\omega} \times \vec{\rho}_i\right)^2 = (\omega\rho_i)^2$

per cui si ottiene $K = \frac{1}{2}Mv_C^2 + \frac{1}{2}I_C\omega^2$

Il momento d'inerzia I_C è definito rispetto all'asse passante per il baricentro e parallelo ad $\vec{\omega}$. Si noti che l'espressione vale in generale, anche se $\vec{\omega}$ non è costante.